Conectando Geometria de Finsler e Mecânica via Geodésicas

Guilherme Cerqueira Gonçalves-IME-USP
(bolsista FAPESP 2021/00551-3)
Orientador: Prof. Marcos M. Alexandrino-IME-USP

Dezembro 2021

Variedades de Riemann e Finsler

Definição 1 (Variedade)

Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é uma **variedade mergulhada** se é localmente descrita por gráficos locais.

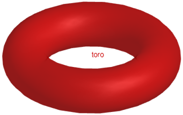
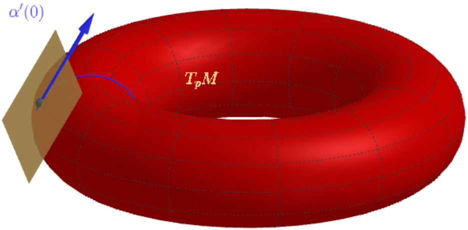


Figura: $M = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 3)^2 + x_3^2 = 1\}$

Definição 2 (Espaço tangente)

O **espaço tangente** T_pM é o espaço vetorial das **velocidades** $\alpha'(0)$ das curvas $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. $TM = \cup_{p \in M} T_pM$ o **fibrado tangente** de M



Definição 3 (Métrica Riemanniana Induzida)

Para cada $p \in M$, e $V = (v_1, v_2, v_3)$, $W = (w_1, w_2, w_3) \in T_pM$ (vetores tangentes a M em $p \in M$) podemos definir um produto interno (chamado **métrica em p**) em T_pM

$$g_p(V, W) = \langle V, W \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

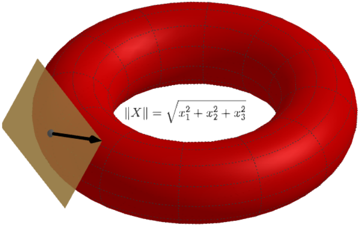


Figura: $\|X\| = \sqrt{g_p(X, X)}$

Definição 4 (Norma de Randers)

$R(v) = \sqrt{g(v,v)} + g(v,\vec{\beta})$ em que g é uma métrica Riemanniana, e $\sqrt{g(\vec{\beta},\vec{\beta})} < 1$.

Definição 4 (Norma de Randers)

$R(v) = \sqrt{g(v,v)} + g(v,\vec{\beta})$ em que g é uma métrica Riemanniana, e $\sqrt{g(\vec{\beta},\vec{\beta})} < 1$.

Note que: (para $\lambda > 0$)

$$R(\lambda v) = \sqrt{g(\lambda v, \lambda v)} + g(\lambda v, \vec{\beta}) = \lambda(\sqrt{g(v,v)}) + \lambda(g(v,\vec{\beta})) = \lambda R(v)$$

Definição 4 (Norma de Randers)

$R(v) = \sqrt{g(v,v)} + g(v, \vec{\beta})$ em que g é uma métrica Riemanniana, e $\sqrt{g(\vec{\beta}, \vec{\beta})} < 1$.

Note que: (para $\lambda > 0$)

$$R(\lambda v) = \sqrt{g(\lambda v, \lambda v)} + g(\lambda v, \vec{\beta}) = \lambda(\sqrt{g(v,v)}) + \lambda(g(v, \vec{\beta})) = \lambda R(v)$$

$$R(v) = \sqrt{g(v,v)} + g(v, \vec{\beta}) \neq R(-v) = \sqrt{g(v,v)} - g(v, \vec{\beta})$$

Definição 4 (Norma de Randers)

$R(v) = \sqrt{g(v,v)} + g(v,\vec{\beta})$ em que g é uma métrica Riemanniana, e $\sqrt{g(\vec{\beta},\vec{\beta})} < 1$.

Note que: (para $\lambda > 0$)

$$R(\lambda v) = \sqrt{g(\lambda v,\lambda v)} + g(\lambda v,\vec{\beta}) = \lambda(\sqrt{g(v,v)}) + \lambda(g(v,\vec{\beta})) = \lambda R(v)$$

$$R(v) = \sqrt{g(v,v)} + g(v,\vec{\beta}) \neq R(-v) = \sqrt{g(v,v)} - g(v,\vec{\beta})$$

Definição 5 (Norma Finsleriana)

Uma variedade M é dita uma **variedade Finsler** se para cada espaço tangente existe uma *norma de Minkowski*:

(1) $F : TM \to \mathbb{R}$ with $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ para $\lambda > 0$;

(2) $g_v(u,w) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(v + su + tw)|_{s=t=0}$, é uma métrica.

Distância e geodésicas

Seja $\|\cdot\|$ a norma Riemanniana $\sqrt{\mathrm{g}(\cdot,\cdot)}$ ou a norma Finsleriana $F(\cdot)$. **A distancia entre dois pontos** é definida como:

$d(p,q) = \inf \sum_i \int_{t_i}^{t_i+1} \|\alpha_i'(t)\| dt$ em que $\alpha : [0,1] \to M$ é uma curva suave por partes com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$.

Note que no caso de uma norma Randers $d(p,q) \neq d(q,p)$.

Distância e geodésicas

Seja $\|\cdot\|$ a norma Riemanniana $\sqrt{g(\cdot,\cdot)}$ ou a norma Finsleriana $F(\cdot)$. **A distancia entre dois pontos** é definida como:

$d(p,q) = \inf \sum_i \int_{t_i}^{t_i+1} \|\alpha_i'(t)\| dt$ em que $\alpha : [0,1] \to M$ é uma curva suave por partes com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$.

Note que no caso de uma norma Randers $d(p,q) \neq d(q,p)$.

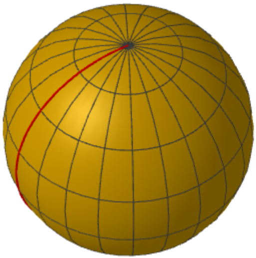
Definição 6 (Geodésica)

Uma curva suave parametrizada por comprimento de arco $\gamma : I \to M$ é dita **geodésica** se ela *minimiza a distância localmente*, i.e, para cada $s_0 \in I$ existe $\epsilon > 0$ tal que $d(\gamma(s_0), \gamma(s)) = \int_{s_0}^{s} \|\gamma'(t)\| dt = s - s_0$ para $s \in [s_0, s_0 + \epsilon]$.

Distância e geodésicas

Definição 6 (Geodésica)

Uma curva suave parametrizada por comprimento de arco $\gamma : I \to M$ é dita **geodésica** se ela *minimiza a distância localmente*, i.e, para cada $s_0 \in I$ existe $\epsilon > 0$ tal que $d(\gamma(s_0), \gamma(s)) = \int_{s_0}^{s} \|\gamma'(t)\| dt = s - s_0$ para $s \in [s_0, s_0 + \epsilon]$.



Equação de Newton

Proposição 7 (Métrica de Jacobi)

Seja γ a solução da Equação de Newton $(\gamma''(t))^T = -(\nabla U)^T$ numa variedade Riemanniana com métrica induzida (M, g_0) tal que a função potencial U é limitada superiormente $(U < c)$. Então γ é geodésica da métrica de Jacobi $(c - U)g_0$ a menos de reparametrização.

Alternativamente, norma de Randers pode ser definida como:

$$R(v) = h(v - R(v)W)$$

onde h é uma **norma Riemanniana** e W é um campos vetorial tal que $h(W, W) < 1$(chamado **vento**).

O par (h, W) é chamado **data de Zermelo**, em T_pM:

$$B_\epsilon^R(0) = B_\epsilon^h(0) + \epsilon W_p$$

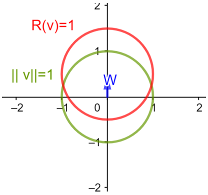


Figura: Vide S. Markvorsen, *A Finsler geodesic spray paradigm for wildfire spread modelling*, Nonlinear Anal., Real World Appl. 28 (2016) 208–228.

Teorema 8 (1)

Considere a norma Randers R com data de Zermelo (h, W) em M, tal que W é um Campo de Killing (i.e., um campo vetorial cujo fluxo é uma isometria). Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ uma geodésica parametrizada por comprimento de arco na variedade Riemanniana (M, h).
Então $\beta(t) = \varphi_t(\alpha(t))$ é uma geodésica Randers parametrizada por comprimento de arco, em que φ_t é o fluxo de W.

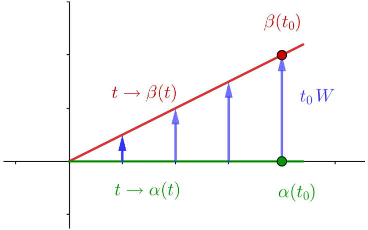


Figura: [1]: P. Foulon and V. S. Matvee, Zermelo Deformation of Finsler metrics, Electronic Research Announcements, V. 25 (2018), 1–7

Exemplo de Katok em S^2

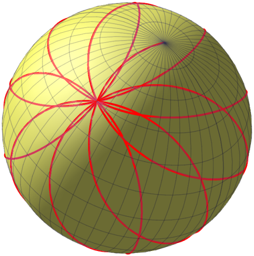


Figura: Geodésica Randers na esfera, obtida com data de Zermelo (h, W) onde h é a métrica Euclidiana induzida na esfera S^2 e W é uma rotação com velocidade angular irracional $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Distância e paralelismo para a frente

Dado $f : M \to \mathbb{R}$ a partição $\mathcal{F} = \{f^{-1}(c)\}$ é chamado **paralela para frente** se para $c_0 < c_1$

$$\boxed{x \in f^{-1}(c_1) \cap C_\epsilon^+(f^{-1}(c_0)) \Longrightarrow f^{-1}(c_1) \subset C_\epsilon^+(f^{-1}(c_0))}$$

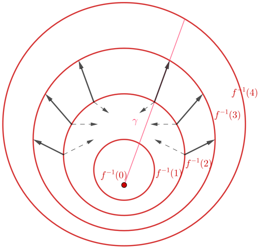


Figura: $f(x) = d(0, x)$

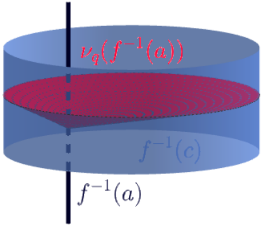


Figura: $f(x) = d(0, x)$

Teorema 9 (3)

As frentes de ondas são pre-imagens da função distância relativo a sua fonte. Ou seja, $f(x) = d(A, x)$, então as frentes de ondas são $f^{-1}(c)$.

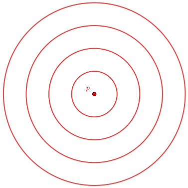


Figura: Huygens: *cada ponto de uma frente de onda possui a funcionalidade de uma nova fonte pontual*

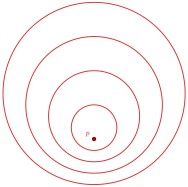


Figura: Markvorsen: Modelo para incêndio (com vento fraco)

[3] H.R. Dehkordi and S. Alberto, *Huygens? envelope principle in Finsler spaces and analogue gravity.* Classical and Quantum Gravity 36.8 (2019): 085008.

Função transnormal: generalizando a função distância

Definição 10

Dado uma variedade de Finsler (M, F) Uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ é chamada F-**função transnormal** se

$$F(\nabla f)^2 = b(f)$$

onde b é contínua.

- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \to \|\nabla f(x, y)\|^2 = 1$, então $b \equiv 1$.
- $f(x, y) = x^2 + y^2 \to \|\nabla f(x, y)\|^2 = 4(x^2 + y^2)$, então $b(z) = 4z$.

Função transnormal: generalizando a função distância

Definição 10

Dado uma variedade de Finsler (M, F) Uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ é chamada F-**função transnormal** se

$$F(\nabla f)^2 = b(f)$$

onde b é contínua.

- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \to \|\nabla f(x, y)\|^2 = 1$, então $b \equiv 1$.
- $f(x, y) = x^2 + y^2 \to \|\nabla f(x, y)\|^2 = 4(x^2 + y^2)$, então $b(z) = 4z$.

Observação 11

- $df(\cdot) = g_{\nabla f}(\nabla f, \cdot)$

Comentário Extras: *Em que condições os conjuntos de nível são paralelos para frente e para trás, ou seja $\mathcal{F} = \{f^{-1}(c)\}$ é uma partição de Finsler?*

Comentário Extras: *Em que condições os conjuntos de nível são paralelos para frente e para trás, ou seja $\mathcal{F} = \{f^{-1}(c)\}$ é uma partição de Finsler?*

Teorema 12 (Em andamento-IC FAPESP)

Seja (M, F) uma variedade de Finsler conexa, compacta analítica e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função F-transormal analítica com $f(M) = [a, b]$. Suponha que os conjuntos de níveis são conexos e a, b são os únicos valores singulares de $[a, b]$. Então:

(a) *os conjuntos $f^{-1}(a)$ e $f^{-1}(b)$ são subvariedades.*

(b) *os conjuntos são equidistantes, ou seja $\mathcal{F} = \{f^{-1}(c)\}$ é uma folheação de Finsler*

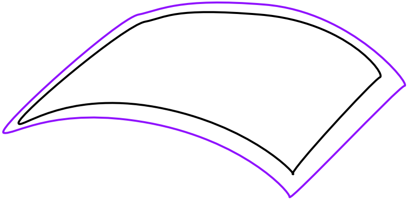
[2] M. M. Alexandrino, B. O. Alves, H. R. Dehkordi, *On Finsler transnormal functions*, Differential Geometry and its Applications Volume 65, 93-107 (2019)

Equação de Newton

Proposição 13 (Métrica de Jacobi)

Seja γ a solução da Equação de Newton $(\gamma''(t))^T = -(\nabla U)^T$ numa variedade Riemanniana com métrica induzida (M, g_0) tal que a função potencial U é limitada superiormente $(U < c)$. Então γ é geodésica da métrica de Jacobi $(c - U)g_0$ a menos de reparametrização.

Ideia da prova da Métrica de Jacobi



$$H_1^{-1}(c_1) \;=\; H_2^{-1}(c_2)$$

- Então, os gradientes simpléticos são múltiplos, ou seja: $X_{H_2}(z) = \lambda(z) X_{H_1}(z)$

- Existe φ, tal que se α_1, α_2 são soluções dos fluxos X_{H_1}, X_{H_2} respectivamente, $\alpha_2 = \alpha_1 \circ \varphi$.

- Aplicar o resultado aos Hamiltoneanos:

$$H(v_p) = \frac{1}{2}\|v_p\|^2 + U(p)$$

$$H_J(v_p) = \frac{\|v_p\|^2}{2(c - U(p))}$$

Teorema 14 (1)

Considere a norma Randers R com data de Zermelo (h, W) em M, tal que W é um Campo de Killing (i.e., um campo vetorial cujo fluxo é uma isometria). Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ uma geodésica parametrizada por comprimento de arco na variedade Riemanniana (M, h).
Então $\beta(t) = \varphi_t(\alpha(t))$ é uma geodésica Randers parametrizada por comprimento de arco, em que φ_t é o fluxo de W.

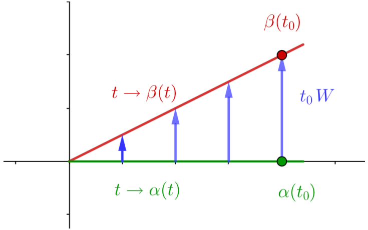


Figura: [1]: P. Foulon and V. S. Matvee, Zermelo Deformation of Finsler metrics, Electronic Research Announcements, V. 25 (2018), 1–7

Ideia da prova do Teorema sobre Geodésicas

- Pelas propriedades de fluxo e regra da cadeia tem-se que a derivada de β é: $\beta'(t) = W(\varphi_t(\alpha(t))) + \varphi_{t*}\alpha'(t)$.

Ideia da prova do Teorema sobre Geodésicas

- Pelas propriedades de fluxo e regra da cadeia tem-se que a derivada de β é: $\beta'(t) = W(\varphi_t(\alpha(t))) + \varphi_{t*}\alpha'(t)$.
- Como φ preserva h e W, prova-se que preserva R. Assim:

$$R(W(\varphi_t(\alpha(t))) + \varphi_{t*}\alpha'(t)) = R(W(\alpha(t)) + \alpha'(t)) = h(\alpha'(t))$$

Ideia da prova do Teorema sobre Geodésicas

- Pelas propriedades de fluxo e regra da cadeia tem-se que a derivada de β é: $\beta'(t) = W(\varphi_t(\alpha(t))) + \varphi_{t*}\alpha'(t)$.
- Como φ preserva h e W, prova-se que preserva R. Assim:

$$R(W(\varphi_t(\alpha(t))) + \varphi_{t*}\alpha'(t)) = R(W(\alpha(t)) + \alpha'(t)) = h(\alpha'(t))$$

- Então, β é parametrizada por comprimento de arco em relação a R e a seguinte igualdade é verdade:

$$\int h(\alpha'(t))dt = \int R(\beta'(t))dt$$

Ideia da prova do Teorema sobre Geodésicas

- Pelas propriedades de fluxo e regra da cadeia tem-se que a derivada de β é: $\beta'(t) = W(\varphi_t(\alpha(t))) + \varphi_{t*}\alpha'(t)$.
- Como φ preserva h e W, prova-se que preserva R. Assim:

$$R(W(\varphi_t(\alpha(t))) + \varphi_{t*}\alpha'(t)) = R(W(\alpha(t)) + \alpha'(t)) = h(\alpha'(t))$$

- Então, β é parametrizada por comprimento de arco em relação a R e a seguinte igualdade é verdade:

$$\int h(\alpha'(t))dt = \int R(\beta'(t))dt$$

- Como α é geodésica, minimiza localmente a distância, então:

$$d_R(0, \varphi_\epsilon(p)) \leqslant d_h(0, p)$$

Ideia da prova do Teorema sobre Geodésicas

- Pelas propriedades de fluxo e regra da cadeia tem-se que a derivada de β é: $\beta'(t) = W(\varphi_t(\alpha(t))) + \varphi_{t*}\alpha'(t)$.
- Como φ preserva h e W, prova-se que preserva R. Assim:

$$R(W(\varphi_t(\alpha(t))) + \varphi_{t*}\alpha'(t)) = R(W(\alpha(t)) + \alpha'(t)) = h(\alpha'(t))$$

- Então, β é parametrizada por comprimento de arco em relação a R e a seguinte igualdade é verdade:

$$\int h(\alpha'(t))dt = \int R(\beta'(t))dt$$

- Como α é geodésica, minimiza localmente a distância, então:

$$d_R(0, \varphi_\epsilon(p)) \leqslant d_h(0, p)$$

- Constrói-se um argumento semelhante, considerando h norma com data $(R, -W)$ obtemos que β também minimiza distância localmente, logo é geodésica.