Oq é Geometria (*Hiperbólica*)?

Lobachevsky, Klein, Gauβ

Guilherme Cerqueira

IME-USP

Oq esperar?

1. Oq é Geometria? (Introdução)
2. O Mundo aos olhos de Klein. (Klein)
3. As Portas do Mundo Hiperbólico. (Lobachesvky + Klein)
4. Considerações Localmente-Finais. ($Gau\beta$)

Uma Introdução que mistura linguagem clássica e "semi-moderna"para motivar as construções, com objetivo de aguçar a curiosidade para a teoria que realmente formaliza e generaliza a Geometria Hiperbólica, Geometria Diferencial.

Excursão para o Passado

- 1850 A.C.: Babilônicos conhecem o teorema de Pitágoras.
- 300A.C.: Euclides desenvolve uma geometria axiomática nos Elementos.
- 1820-1823: Bolyai faz seu tratado sobre Absolute Geometry. (Publicado em 1832)
- 1826: Lobachevsky (independentemente de Bolyai e Gauss) compartilha suas primeiras descobertas sobre Geometria Hiperbólica. (Publicadas em 1829)
- 1853: Gauss pede a seu estudante, Riemann, para preparar a *Habilitationsschrift* sobre as bases da Geometria.
- 1868: Beltrami demonstra que as Geometrias Hiperbólica e Euclidiana são Equiconsistentes.
- 1872: Klein torna-se professor em Erlangen e cria o *Programa de Erlangen*.
- 1894: Hilbert axiomatiza a Geometria Euclidiana.
- 1905(1915): Einstein publica Teoria da Relatividade Restrita (Geral).

Euclides Vs Klein

Euclides:

- Postulado 1: Dados dois pontos distintos, há um único segmento de reta que os une.
- Postulado 2: Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta.

Euclides Vs Klein

Euclides:

- Postulado 3: Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada. (Noção de Distância.)

Euclides Vs Klein

Euclides:

- Postulado 4: Todos os ângulos retos são congruentes (semelhantes). (Noção de Ângulo.)

Euclides Vs Klein

Euclides:

- Postulado 5: Se duas linhas intersectam uma terceira linha de tal forma que a soma dos ângulos internos em um lado é menor que dois ângulos retos, então as duas linhas devem se intersectar neste lado se forem estendidas indefinidamente. (Postulado de Euclides ou Postulado das Paralelas)

Euclides Vs Klein

Euclides:

- Postulado 5': Dado um reta e um ponto fora dela existe uma única reta paralela a primeira passando por esse ponto.

Euclides Vs Klein

Euclides:

- Postulado 5': Dado um reta e um ponto fora dela existe uma única reta paralela a primeira passando por esse ponto.

Klein:

- Dados uma Espaço(Variedade) e um Grupo de Transformações sobre ele, devem ser pesquisadas aquelas propriedades das Figuras pertencentes a esse Espaço que não mudam pelas Transformações do Grupo.

Euclides Vs Klein

Euclides:

- Postulado 5': Dado um reta e um ponto fora dela existe uma única reta paralela a primeira passando por esse ponto.

Klein:

- Dados uma Espaço(Variedade) e um Grupo de Transformações sobre ele, devem ser pesquisadas aquelas propriedades das Figuras pertencentes a esse Espaço que não mudam pelas Transformações do Grupo.

$\textit{Exemplo}_1 : \textit{Translações} \curvearrowright \mathbb{R}^2$

Euclides Vs Klein

Euclides:

- Postulado 5': Dado um reta e um ponto fora dela existe uma única reta paralela a primeira passando por esse ponto.

Klein:

- Dados uma Espaço(Variedade) e um Grupo de Transformações sobre ele, devem ser pesquisadas aquelas propriedades das Figuras pertencentes a esse Espaço que não mudam pelas Transformações do Grupo.

$Exemplo_1$: *Translações* $\curvearrowright \mathbb{R}^2$
$Exemplo_2$: Rotações $\curvearrowright \mathbb{R}^2$

Euclides Vs Klein

Euclides:

- Postulado 5': Dado um reta e um ponto fora dela existe uma única reta paralela a primeira passando por esse ponto.

Klein:

- Dados uma Espaço(Variedade) e um Grupo de Transformações sobre ele, devem ser pesquisadas aquelas propriedades das Figuras pertencentes a esse Espaço que não mudam pelas Transformações do Grupo.

$Exemplo_1$: *Translações* $\curvearrowright \mathbb{R}^2$
$Exemplo_2$: Rotações $\curvearrowright \mathbb{R}^2$
$Exemplo_{\aleph_0}$: $Iso(M) \curvearrowright (M, g)$

Euclides Vs Klein

Euclides:

- Postulado 5': Dado um reta e um ponto fora dela existe uma única reta paralela a primeira passando por esse ponto.

Klein:

- Dados uma Espaço(Variedade) e um Grupo de Transformações sobre ele, devem ser pesquisadas aquelas propriedades das Figuras pertencentes a esse Espaço que não mudam pelas Transformações do Grupo.

$Exemplo_1$: $Translações \curvearrowright \mathbb{R}^2$
$Exemplo_2$: Rotações $\curvearrowright \mathbb{R}^2$
$Exemplo_{\aleph_0}$: $Iso(M) \curvearrowright (M, g)$
$Exemplo_2'$: $SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^2$

Euclides Vs Klein

Euclides:

- Postulado 5': Dado um reta e um ponto fora dela existe uma única reta paralela a primeira passando por esse ponto.

Klein:

- Dados uma Espaço(Variedade) e um Grupo de Transformações sobre ele, devem ser pesquisadas aquelas propriedades das Figuras pertencentes a esse Espaço que não mudam pelas Transformações do Grupo.

$Exemplo_1$: $Translações \curvearrowright \mathbb{R}^2$
$Exemplo_2$: Rotações $\curvearrowright \mathbb{R}^2$
$Exemplo_{\aleph_0}$: $Iso(M) \curvearrowright (M, g)$
$Exemplo'_2$: $SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^2$
$Exemplo'_{\aleph_0}$: $Sp(2n) \curvearrowright (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$

Euclides aos olhos de Klein

Pergunta

Quais são as transformações em $\mathbb{R}^2$ que preservam distância e ângulos?

Euclides aos olhos de Klein

Pergunta

Quais são as transformações em $\mathbb{R}^2$ que preservam distância e ângulos?

Movimentos Rígidos e Reflexões.

Euclides aos olhos de Klein

Pergunta

Quais são as transformações em $\mathbb{R}^2$ que preservam distância e ângulos?

Movimentos Rígidos e Reflexões.

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ p & \longmapsto & Ap + a \end{array}, \text{A} \in O(2); a \in \mathbb{R}^2$$

$$O(2) = \{A \in M_{2x2}(\mathbb{R}) : AA^T = I\}$$

Mundo Projetivo

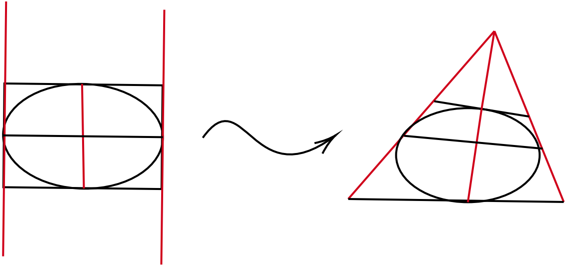
Definição 1

Plano Projetivo $\mathbb{RP}^2$ é o plano unido com um ponto para cada direção. (Pontos do Infinito.)

Mundo Projetivo

Definição 1

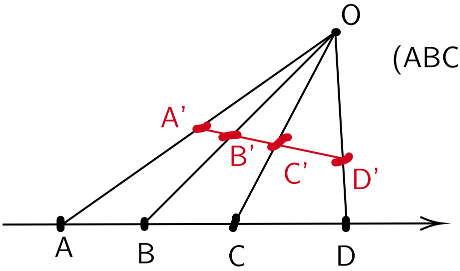
Plano Projetivo $\mathbb{R}P^2$ é o plano unido com um ponto para cada direção. (Pontos do Infinito.)



Mundo Projetivo

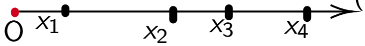
Definição 1

Plano Projetivo $\mathbb{R}P^2$ é o plano unido com um ponto para cada direção. (Pontos do Infinito.)



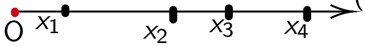
$$(ABCD) = \frac{CA/CB}{DA/DB} = (A'B'C'D')$$

Projetivizando $\mathbb{C}$



$$(ABCD) = \frac{CA/CB}{DA/DB} = \frac{x_3 - x_1 / \ x_3 - x_2}{x_4 - x_1 / \ x_4 - x_2}$$

Projetivizando $\mathbb{C}$

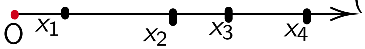


$$(ABCD) = \frac{CA/CB}{DA/DB} = \frac{x_3 - x_1 / \; x_3 - x_2}{x_4 - x_1 / \; x_4 - x_2}$$

Pergunta

Qual o grupo de transformações projetivas em $\mathbb{C}P^1$?

Projetivizando $\mathbb{C}$



$$(ABCD) = \frac{CA/CB}{DA/DB} = \frac{x_3 - x_1 / \, x_3 - x_2}{x_4 - x_1 / \, x_4 - x_2}$$

Pergunta

Qual o grupo de transformações projetivas em $\mathbb{C}P^1$?

$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C} \mid$ (Transformações de *Möbius*)

Projetivizando $\mathbb{C}$

Pergunta

Qual o grupo de transformações projetivas em $\mathbb{C}P^1$?

$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C} \mid$ (Transformações de *Möbius*)

Pergunta

Qual grupo de transformações em $D \subset \mathbb{C}$ que preserva razões cruzadas?

Projetivizando $\mathbb{C}$

Pergunta

Qual o grupo de transformações projetivas em $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$?

$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C} \mid$ (Transformações de *Möbius*)

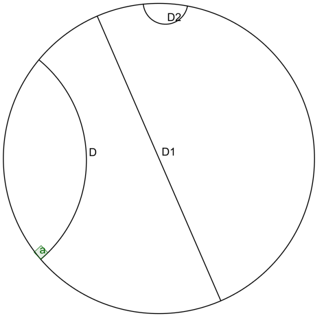
Pergunta

Qual grupo de transformações em $D \subset \mathbb{C}$ que preserva razões cruzadas?

$z \longmapsto e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \alpha \in \mathbb{R}; a \in D \mid$ (Subgrupo de Transformações de *Möbius*)

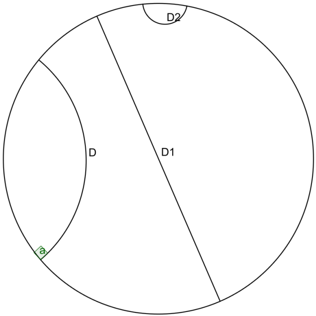
Modelo do Disco de Poincaré

1. As retas(geodésicas) desta geometria são arcos de circunferência ortogonais a ∂D. (Postulados 1 e 2.)



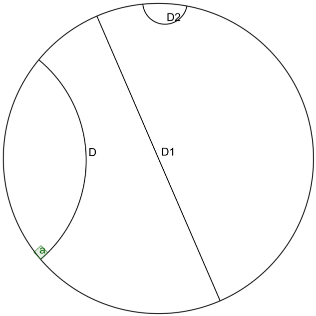
Modelo do Disco de Poincaré

1. As retas(geodésicas) desta geometria são arcos de circunferência ortogonais a ∂D. (Postulados 1 e 2.)
2. Ângulos Euclidianos, Preserva ângulos e Age 2-Homogeneamente. (Postulado 4.)



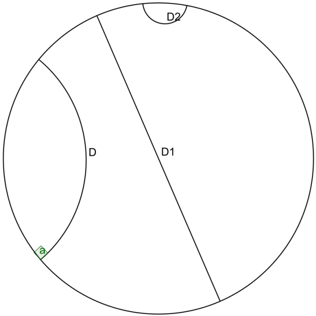
Modelo do Disco de Poincaré

1. As retas(geodésicas) desta geometria são arcos de circunferência ortogonais a ∂D. (Postulados 1 e 2.)
2. Ângulos Euclidianos, Preserva ângulos e Age 2-Homogeneamente. (Postulado 4.)
3. $d(z,w) = \frac{1}{2}|ln((uvzw))| = \frac{1}{2}|ln(\frac{|zu||wv|}{|zv||wu|})|$.



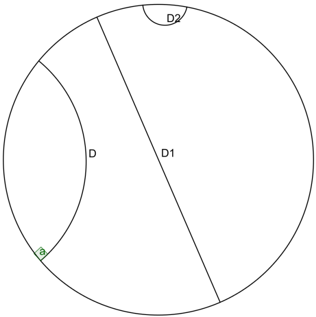
Modelo do Disco de Poincaré

1. As retas(geodésicas) desta geometria são arcos de circunferência ortogonais a ∂D. (Postulados 1 e 2.)
2. Ângulos Euclidianos, Preserva ângulos e Age 2-Homogeneamente. (Postulado 4.)
3. $d(z,w) = \frac{1}{2}|ln((uvzw))| = \frac{1}{2}|ln(\frac{|zu||wv|}{|zv||wu|})|$.
4. Círculos na origem são euclidianos e preserva círculos.(Postulado 3.)



Modelo do Disco de Poincaré

1. As retas(geodésicas) desta geometria são arcos de circunferência ortogonais a ∂D. (Postulados 1 e 2.)
2. Ângulos Euclidianos, Preserva ângulos e Age 2-Homogeneamente. (Postulado 4.)
3. $d(z,w) = \frac{1}{2}|ln((uvzw))| = \frac{1}{2}|ln(\frac{|zu||wv|}{|zv||wu|})|$.
4. Círculos na origem são euclidianos e preserva círculos.(Postulado 3.)
5. Note que Postulado 5 **não** é satisfeito.



Semi-plano de Poincaré

Pergunta

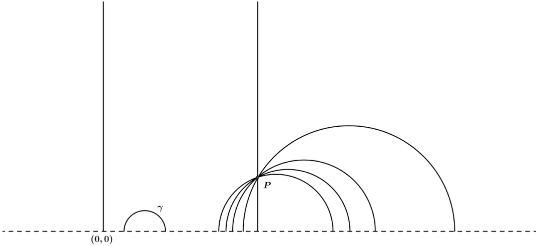
Qual o grupo de transformações em $\mathbb{H}^2$ que preserva razão cruzada?

$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}; ad - bc = 1 \mid (\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\})$

Isomorfismo:

$$\begin{array}{cccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{H}^2 \\ & z & \longmapsto & \frac{z+i}{iz+1} \end{array}$$

$d(z,w) = |ln((uvzw))| = |ln(\frac{|zu||wv|}{|zv||wu|})|.$



Gauss-Bonnet

Curvatura Constante -1. $K(p) = \lim\limits_{\Delta \to p} \frac{2\pi - \Sigma Ext(\Delta)}{\mathcal{A}(\Delta)}$.

$$\Delta : \int\limits_{\Delta} KdA = 2\pi - \Sigma Ext(\Delta) = \Sigma Int(\Delta) - \pi.$$

$$P_n : \int\limits_{P_n} KdA = 2\pi - \Sigma Ext(P_n) = \Sigma Int(P_n) + (2-n)\pi.$$

$$Teorema : \int\limits_{M} KdA + \int\limits_{\partial M} k_g ds = 2\pi\chi(M).\ (\chi(M) = 2 - 2g.)$$

Cade... Minhas... ROSQUINHAS!!!?? $\frown$̈

$(\Sigma Ext(\Delta))$ - $(\mathcal{A}(\Delta)) = 2\pi$. Consequentemente, $\Sigma Ext(\Delta) > 2\pi$.
$\Sigma Int(\Delta) < \pi$.
$\Sigma Ext(P_n) > 2\pi. \Rightarrow \Sigma Int(P_n) < \pi(n-2)$.

O Mundo Diferencial da Geometria

Onde está *Gau*β(1777-1855)?

O Mundo Diferencial da Geometria

Onde está *Gau*β(1777-1855)?

Como Tapar Buracos?

- Wikipédia: Möbius Transformation.(Inglês.)
- Wikipédia: SL2(R).(Inglês.)
- Wikipédia: Hyperbolic Geometry.(Inglês.)
- Wikipédia: Gauss–Bonnet theorem.(Inglês.)

Vídeos pros que não sabem ler. $\ddot\smile$

1. CVGA 2018 29 O que é Geometria, por Umberto Hryniewicz.[Pesquisar O que é Geometria, Umberto.] (Canal: Felipe Acker)(Português.)
2. Beauty of Geodesics. (Canal: Physics Videos by Eugene Khutoryansky)
3. SHM - 22/05/2015 - Les géométries non euclidiennes - David Rowe (Canal: Institut Henri Poincaré)(Inglês.)
4. Geometria hiperbólica sem coordenadas | Inverno ICMC. (Canal: Hugo Cattarucci Botós)(Português.)

Patrocinador: Libgen ♡

- Inedio Arcari *Um Texto de Geometria Hiperbólica* Dissertação de Mestrado UNICAMP 2008 [Pesquisar: História da Geometria Hiperbólica no Google.]
- M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 3 Publish or Perish; 3rd edition (January 1, 1999)
- M. M. Alexandrino, *Introdução a Geometria Riemanniana*, Notas de Aula (2019) https://www.ime.usp.br/ malex/teachingnew.htm https://www.ime.usp.br/ malex/arquivos/lista2019/GeoRiemanniana-Main-novo2019.pdf
- Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, Jacques Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Third Edition, Springer. 2004