

Campos de Jacobi em Variedades Riemannianas

Guilherme Cerqueira Gonçalves

Resumo Neste survey será estudada a ferramenta de Campo de Jacobi para Variedades Riemannianas. Resultados iniciais de Geometria Riemanniana não serão, em sua maioria, demonstrados mas estarão presentes para que o leitor entenda a estrutura em questão. Resultados de Jacobi e algumas implicações serão demonstrados. Este projeto se baseia fortemente em [1] e [3].

Sumário

1	Introdução	2
2	Preliminares	2
2.1	Variedades e Fibrados Vetoriais	3
2.2	Variações de curvas	5
3	Uma Breve Introdução a Geometria Riemanniana	6
3.1	Variedades Riemannianas	6
3.2	Conexões Afins	8
3.3	Geodésicas	12
3.4	Tensor de Curvatura	15
3.5	Campos de Jacobi	18
4	Aplicações	22
4.1	Primeiras Aplicações	22
4.2	Resultados Notáveis e Futuros Estudos	26

1 Introdução

O projeto se trata de uma introdução breve a Geometria Riemanniana a fim de se traçar um "caminho mínimo" até *Campos de Jacobi*. Essa ferramenta aparece naturalmente ao se perguntar sobre problemas variacionais em Variedades e se mostra uma ferramenta muito importante para demonstração de resultados importantes sobre Geometria Riemanniana, este projeto tem a ambição de mostrar um pouco desta importância. Vale notar que para estudo de Geometria mais gerais, como *Geometria de Finsler*, a mesma ferramenta ainda está presente e permite se obter muitos resultados semelhantes, tal estudo porém foge do escopo deste projeto. O autor está fazendo tal estudo na sua Iniciação Científica orientado pelo professor Marcos Alexandrino.

Na segunda sessão deste survey fala-se muito brevemente sobre uns conceitos preliminares como Variedades, Fibrados e Variações de Curvas.

Na terceira, tem-se o grosso do projeto. Resultados iniciais de Geometria Riemanniana são apresentados sem demonstração e com exemplos, alguns resultados mais posteriores são demonstrados quando úteis. Culminando na definição de *Campo de Jacobi* conceito central do projeto.

Na quarta e última, são apresentadas aplicações de Campos de Jacobi. Primeiramente duas aplicações feitas em riqueza de detalhes, estudo de Campos de Jacobi em *Variedades de Curvatura Constante* e estudo de *Pontos Conjugados*. Depois é apresentada breve lista de resultados clássicos de Geometria Riemanniana em que Campos de Jacobi aparece e referências para futuro estudo do leitor interessado.

Agradecimentos: Quero agradecer ao meu orientador, prof. Marcos Alexandrino, que apesar de não me ajudar com este trabalho diretamente me orientou no estudo de Geometria Riemanniana o que tornou o trabalho mais acessível e suas Notas de Aula [1] foram muito valiosas para escrever este trabalho.

2 Preliminares

Nesta primeira sessão relembremos brevemente algumas definições e resultados úteis.

2.1 Variedades e Fibrados Vetoriais

Aqui definiremos objetos centrais para nosso estudo as Variedades e o Fibrados Vetoriais. Esta lista de definições e exemplos é curta e para mais detalhes recomendando consultar capítulo 1 de [1].

2.1.1 Variedades

Definição 2.1. Uma **variedade** M^m de dimensão m é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável¹ que admite uma estrutura diferenciável, i.e., duplas (U_α, ψ_α) (cartas) tal que para cada α , U_α é aberto de M e homeomorfismos $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ entre abertos, tais que:

- (a) $M = \cup_\alpha U_\alpha$
- (b) $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(W) \rightarrow \psi_\beta(W)$ é um difeomorfismo, quando $U_\alpha \cap U_\beta = W \neq \emptyset$
- (c) a coleção $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_\alpha$ (atlas) é máxima em relação aos itens acima.

Definição 2.2. Sejam duas variedades M e N com atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ e $\{(\tilde{U}_\beta, \tilde{\psi}_\beta)\}$. Uma aplicação $F : M \rightarrow N$ é chamada uma **aplicação suave em um ponto** p se existe uma vizinhança U_α de p e uma vizinhança \tilde{U}_β de $F(p)$ tal que a aplicação $\tilde{\psi}_\beta \circ F \circ \psi_\alpha^{-1}$ é suave em $\psi_\alpha(p)$. É possível verificar que tal definição não depende da escolha de cartas. A aplicação F será então chamada suave se for suave para todo $p \in M$.

Recordemos que se $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é uma m -variedade mergulhada e $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset M$ é uma parametrização, então o subespaço afim $T_p M = D\varphi_0 \mathbb{R}^m$ é chamado de espaço tangente no ponto p .

Definição 2.3. Seja M variedade e $p \in M$. Considere $C^\infty(p)$ a álgebra dos germes de funções suaves em p .² O **espaço tangente** $T_p M$ é definido como o espaço das derivações lineares em p ou seja o conjunto das aplicações $v_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

-
1. Vale lembrar que um espaço Hausdorff e base enumerável é um espaço metrizável, pelo Teorema da Metrização de Urysohn. Logo, toda variedade pode se tornar um Espaço Métrico.
 2. Dizemos que duas funções f e g tem o mesmo germe em p se p está no domínio das duas e se existe uma vizinhança de p (comum aos dois domínios) onde f e g coincidem.

$$(1) v_p \cdot (af + bg) = av_p \cdot f + bv_p \cdot g. (\mathbb{R} - \text{lineares.})$$

$$(2) v_p \cdot (fg) = (v_p \cdot f) g(p) + f(p) (v_p \cdot g). (\text{regra de Leibniz}).$$

para todos $f, g \in C^\infty(p)$ e $a, b \in \mathbb{R}$

Seja (U, ψ) um sistema de coordenadas onde $\psi(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$ é o sistema de coordenadas da vizinhança U contendo p . Considere $\tilde{f} := f \circ \psi^{-1}$ a representação de $f \in C^\infty(p)$ no sistema de coordenadas ψ . Chamaremos vetores coordenados as derivações lineares:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) \cdot f := \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \Big|_{\psi(p)}$$

Definição 2.4. Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação suave e $p \in M$ A **derivada de F em p** é a aplicação linear $dF_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, tal que se $v \in T_p M$, então $dF_p v$ é o vetor tangente à $F(p)$ atendendo

$$dF_p(v) \cdot f = v_p \cdot (f \circ F)$$

para todo $f \in C^\infty(F(p))$

2.1.2 Fibrados Vetoriais

Fibrados são espaços cruciais para o estudo de geometria, o exemplo mais clássico é TM fibrado tangente, união de todos os espaços tangentes em cada ponto de M , de uma variedade que representa de um ponto de vista de mecânica o espaço de posições e velocidades de uma variedade.

Definição 2.5. (Fibrado vetorial). Sejam E e M variedades, $\pi : E \rightarrow M$ uma submersão e $G = GL(n)$ os automorfismos de \mathbb{R}^n . Suponha que existe uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M e difeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ tais que:

$$(a) \pi \circ \varphi_\alpha(p, v) = p \text{ para todo } (p, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

$$(b) \text{ se } U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \text{ então } \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(p, v) = (p, \theta_{\beta, \alpha}(p)v) \text{ onde } \theta_{\alpha, \beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G \text{ é suave}$$

$$(c) (\varphi_\alpha, U_\alpha) \text{ é máximo em relação aos itens acima.}$$

A tripla (E, M, π) (por vezes também denotada por $\mathbb{R}^n \rightarrow E \rightarrow M$) é chamada **fibrado vetorial de posto n e projeção π** . Para cada $p \in M$ o espaço $E_p := \pi^{-1}(p)$ é chamado fibra sobre p e herda naturalmente uma estrutura de espaço vetorial.

Exemplo 2.6. Seja M^m variedade.

- (a) O fibrado tangente de M é definido como $TM = \cup_{p \in M} T_p M$ onde a projeção $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica $\pi(v_p) = p$.
- (b) Fibrado cotangente de M é definido como $TM^* = \cup_{p \in M} T_p^* M$ onde $T_p^* M$ é o espaço dual de $T_p M$.
- (c) o fibrado normal de M é definido como $\nu(M) = \cup_{p \in M} \nu_p(M)$ onde $\nu_p(M)$ é espaço normal a $T_p M$, no caso em que $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é subvariedade do espaço Euclidiano.

Definição 2.7. Dado um fibrado vetorial (E, M, π) uma **seção** é uma aplicação $\xi : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \xi = id$. Em particular um campo vetorial \vec{F} é uma **seção** de TM . Denotaremos o conjunto $(C^\infty(M)$ –módulo) de campos vetoriais de M por $\mathfrak{X}(M)$

Exemplo 2.8. Uma 1-forma diferencial de uma variedade M^m é uma seção de TM^* e se $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ for variedade mergulhada então um campo normal a M é uma seção de $\nu(M)$.

2.2 Variações de curvas

Para a Geometria, curvas são objetos centrais. Veremos em breve que a partir delas definimos, por exemplo, distâncias. Para estudar curvas uma técnica comum é estudar variações ou deformações de curvas.

Isso pode ser visto como aplicações que moram no espaço de curvas de um dado espaço. Problemas desse tipo são comuns em Mecânica Clássica e Cálculo de Variações que são áreas ativas de pesquisa até hoje.

Um das Variações de curvas mais comum é a Homotopia de Curvas com extremos fixos, presente na Mecânica Lagrangeana e também na Topologia Algébrica, por exemplo para definir o Grupo Fundamental. Nesse ponto de vista o problema de saber qual curva realiza a distância entre dois pontos, ou seja, dentre todas as curvas que ligam dois pontos qual a que possui menor comprimento

pode ser visto como um problema variacional. Intuitivamente, o problema trata de variar a curva por uma homotopia suave e procurar o ponto de mínimo do Funcional Comprimento. Esse seria o "caminho mínimo" entre esses dois pontos.

As discussões deste projeto vão deixar mais concretas algumas dessas ideias e veremos que *Campos de Jacobi* geram um tipo especial de Variação de Curvas que nos permitirá criar variações muito mais bem comportadas Analiticamente e Geometricamente que a Homotopia, por exemplo.

3 Uma Breve Introdução a Geometria Riemanniana

Nesta sessão faremos uma breve introdução a Geometria Riemanniana, nossa abordagem será a fim de maximizar a brevidade da apresentação e traçar um "caminho mínimo" até o estudo de *Campos de Jacobi*, objeto foco deste Survey. Para obter a agilidade desejada muitos resultados que fundamentam a teoria terão suas demonstrações omitidas, leitor interessado pode encontrar essas demonstrações nas Notas de Aula [1] de onde maior parte desses fatos foi retirado ou no clássico livro [3].

3.1 Variedades Riemannianas

Aqui apresentamos as definições básicas dos objetos da nossa geometria, seus primeiros exemplos e características. Primeiramente definiremos nossa *métrica* em questão, métrica Riemanniana, e naturalmente nossos objetos centrais: as *Variedades Riemannianas*.

Definição 3.1. Uma **métrica Riemanniana** de uma variedade M é uma seção do fibrado dos 2-tensores simétricos positivos definidos em TM . Ou seja, é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno g_p em T_pM tal que $g_{i,j} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ é suave. Uma variedade com uma métrica g , (M, g) , é dita **variedade Riemanniana**.

Com a definição em mãos, temos nossa primeira proposição; que possui uma demonstração bem curta e será omitida; ela nos garante que apesar de a métrica

Riemanniana ser um tipo específico de métrica, é geral o suficiente para qualquer variedade admitir uma.³

Proposição 3.2. Toda variedade admite métrica Riemanniana.

Essa proposição começa a nos indicar que Geometria Riemanniana é uma ferramenta interessante para estudar não só para entender a Geometria Métrica de um Espaço, como possivelmente sua Topologia. Focaremos primeiro em conceitos mais geométricos, como distância.

Definição 3.3. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow (M, g)$ curva C^1 por partes. O **comprimento da curva** α é dado por:

$$L(\alpha) := \sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{g(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt$$

A **distância entre p e q** pertencentes a M é dada por:

$$d(p, q) := \inf_{\alpha \in \Omega_{p,q}} L(\alpha)$$

Em que $\Omega_{p,q}$ é o conjunto de curvas C^1 por partes⁴ começando em p e terminando em q .

Exemplo 3.4. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade mergulhada. Então (M, g^M) é variedade Riemanniana com a métrica induzida $g^M := i^* g_0$ onde $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a inclusão e g_0 é a métrica Euclidiana. Em particular, se M for a esfera S^{n-1} a métrica induzida será a métrica canônica da esfera euclidiana.

Exemplo 3.5. Seja M^2 superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 invariante por rotação no eixo z , ou seja, uma superfície de revolução. Seja g a métrica induzida em M do

3. Vale lembrar que toda variedade é também um Espaço Metrizável, pelo Teorema de Metrização de Urysohn, mas isso não garante a priori a existência de métrica Riemanniana, felizmente a proposição nos garante isso.

4. O conceito de suavidade por partes é usado nessas definições, no lugar do conceito mais simples de suavidade, para evitar "problemas topológicos" que nossas variedades ainda podem possuir. Apesar de serem espaços muito bem comportados uma variedade pode, por exemplo, não ser completa.

espaço Euclidiano, i.e., $g = i^* g_0$ onde g_0 é a métrica Euclidiana e $i : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a inclusão. Considere a parametrização $\varphi : U \rightarrow M$ definida como

$$\varphi(t, \theta) = (r(t) \cos(\theta); r(t) \sin(\theta); h(t))$$

onde $\beta(t) = (r(t); 0; h(t))$ é parametrização por comprimento de arco da curva geratriz, i.e., $r(t) \neq 0$ e $|\beta'| = 1$. A primeira forma fundamental é $\varphi^* g^0 = dt^2 + r^2(t)d\theta^2$. Para $\beta(t) = (\cos(t) + 2, 0, \sin(t))$ temos um Toro de Revolução em \mathbb{R}^3 e sua métrica Riemanniana induzida.

3.2 Conexões Afins

Nesta sessão falaremos sobre Conexões, essa estrutura nos permitira conectar as fibras dos nossos Fibrados Vetoriais, em especial de TM o fibrado que mais estudaremos.

Com isso, teremos um ferramental mais poderoso para tratar de variações na nossa variedades, podendo não só falar sobre velocidade (nossos campos suaves) como também falar de aceleração, ou seja, como derivar campos.

Assim, culminando no nosso conceito central de *Derivada Covariante*. Posteriormente conectando isso a nossa estrutura Riemanniana, com a dita *Conexão de Levi-Civita* ou *Conexão Riemanniana*.

3.2.1 Conexão e Derivada Covariante

Definição 3.6. Sejam (E, M, π) fibrado vetorial e $\Gamma(E)$ o conjunto das seções de E . Uma **conexão afim** é uma aplicação \mathbb{R} -*bilinear* :

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (X, V) &\longmapsto \nabla_X V \end{aligned}$$

atendendo as seguintes condições, com $f \in C^\infty(M)$:

- (a) $\nabla_{fX} V = f \nabla_X V$
- (b) $\nabla_X fV = f \nabla_X V + (Xf)V$

Vamos agora descrever uma conexão afim utilizando coordenadas do fibrado $E \rightarrow M$.

Seja U uma vizinhança coordenada de $p \in M$ e $\{\xi_i\}$ referenciais de $E|_U$, i.e., $\xi_j(p) = \psi^{-1}(p, e_j)$ onde $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ é uma trivialização do fibrado E . Suponha $W = \sum_i w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $V = \sum_j v_j \xi_j$. Temos então que

$$\begin{aligned} \nabla_W V &= \nabla_W \sum_j v_j \xi_j \\ &= \sum_j (W \cdot v_j) \xi_j + \sum_j v_j \nabla_W \xi_j \\ &= \sum_k (W \cdot v_k) \xi_k + \sum_{i,j} v_j w_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j \end{aligned}$$

A equação acima então implica que (3.1.1)

$$\nabla_W V = \sum_k \left\{ (W \cdot v_k) + \sum_{i,j} w_i v_j \Gamma_{i,j}^k \right\} \xi_k$$

onde a função $\Gamma_{i,j}^k$ é chamada **símbolo de Christoffel** e é definida como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j = \sum_k \Gamma_{i,j}^k \xi_k$$

É importante observar que a fórmula acima garante que $(\nabla_W V)_p$ depende apenas do vetor $W(p)$ e não do campo W .

Em coordenadas, a conexão admite forma matricial:

$$\nabla_X V = D_X V + A(X)V$$

tal que $A(\cdot)$ é matriz de 1-formas, dada por:

$$a_{kj}(\cdot) := \sum_i \Gamma_{i,j}^k dx_i$$

Proposição 3.7. *Sejam (E, π, M) um fibrado vetorial com conexão ∇ . Seja $\alpha : I \rightarrow M$ curva suave. Denote por $\Gamma(\alpha^*E)$ o espaço das seções de E ao longo da α , então existe um único operador $\frac{\nabla}{dt} : \Gamma(\alpha^*E) \rightarrow \Gamma(\alpha^*E)$ tal que:*

- (a) $\frac{\nabla}{dt}(V + W) = \frac{\nabla}{dt}(V) + \frac{\nabla}{dt}(W)$
- (b) $\frac{\nabla}{dt}(fV) = f'V + f\frac{\nabla}{dt}(V); f : I \rightarrow \mathbb{R}$ suave.
- (c) Se $\tilde{V} \in \Gamma(E)$, e $V(t) := \tilde{V}(\alpha(t))$, então $\frac{\nabla}{dt}V = \nabla_{\alpha'}\tilde{V}$

O operador $\frac{\nabla}{dt}$ é chamado de **Derivada Covariante**, no caso da proposição anterior a derivada covariante ao longo da curva α .

Proposição 3.8. *Seja (E, π, M) fibrado vetorial com conexão ∇ e $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ curva suave e $v \in E_{\alpha(a)}$. Então, existe única seção $V \in \Gamma(\alpha^*E)$ tal que $V(a) = v$ e $\frac{\nabla}{dt}V(t) = 0, \forall t \in [a, b]$.⁵*

3.2.2 Conexão de Riemanniana

Definiremos agora um objeto que é um dos indícios de que a Geometria Riemanniana é especial, sendo ela geral o suficiente para abarcar muitos problemas e objetos mas ao mesmo tempo específica o suficiente para possuir estruturas bem comportadas.

Existe uma "conexão preferencial" e que é única, a Conexão Riemanniana ou de Levi-Civita.⁶

Definição 3.9. *Seja (M, g) variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em TM é dita **conexão de Levi-Civita** ou **conexão Riemanniana** se para quaisquer $X, Y, W \in \mathfrak{X}(M)$ temos:*

5. Seções V que satisfazem derivada covariante nula para todo tempo são ditas *paralelas*.

6. Esse comentário é pertinente na óptica de que para outras geometrias com menos estrutura, por exemplo a Geometria de Finsler, não há uma conexão tão bem comportada então de acordo com cada situação deve-se escolher uma das duas condições para a conexão satisfazer: ser livre de Torção ou ser compatível com a métrica. Infelizmente, tal discussão foge ao escopo deste texto.

(a) $X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$. (Compatível com a métrica.)

(b) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. (Livre de Torção.)

Agora provaremos sua unicidade e mostraremos sua representação com contas, usando os Símbolos de Christoffel.

Teorema 3.10. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Então existe uma única conexão Riemanniana em TM . Tal conexão é dada pela fórmula de Koszul abaixo:*

$$2g(\nabla_Y X, Z) = X \cdot g(Y, Z) - Z \cdot g(X, Y) + Y \cdot g(Z, X) \\ - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X)$$

Demonstração. Suponha que a conexão Riemanniana existe. Então temos pela compatibilidade com a métrica que:

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ Z \cdot g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \\ Y \cdot g(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$$

As equações acima e o fato da conexão ser livre de torção implicam que:

$$X \cdot g(Y, Z) - Z \cdot g(X, Y) + Y \cdot g(Z, X) = 2g(\nabla_Y X, Z) + g([X, Y], Z) \\ + g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X)$$

a qual por sua vez implica a fórmula de Koszul. Por fim, pode-se verificar que a fórmula de Koszul define uma conexão Riemanniana. □

Corolário 3.11. *Seja (M, g) variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Então:*

$$\Gamma_{i,j}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial g_{j,k}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{k,i}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_k} \right) g^{k,m}$$

onde (g^{ij}) é a matriz inversa de $(g_{i,j})$ e Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel definidos na subseção anterior.

3.3 Geodésicas

Com a Derivada Covariante em mãos, definiremos um objeto muito central, as retas da nossa geometria, as *Geodésicas*. Com isso definiremos a *aplicação exponencial* e exploraremos algumas propriedades desses.

A conexão ∇ usada daqui em diante será sempre a Conexão Riemanniana relativa a Variedade Riemanniana em questão, a menos que dito o contrário. Naturalmente, as derivadas covariantes serão relativas a tal conexão.

3.3.1 Definição e Propriedades

Definição 3.12. Uma curva suave $\alpha : I \rightarrow M$ é dita **geodésica** se $\frac{\nabla}{dt}\alpha'(t) = 0$.

Definição 3.13. Define-se $G \in \mathfrak{X}(TM)$ chamado **campo geodésico** se o fluxo de G , chamado **fluxo geodésico** φ^G , se projeta na variedade em *geodésicas* como $\varphi(\cdot, V_q) = \pi \circ \varphi^G(\cdot, V_q)$.

Proposição 3.14. Dado $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M , números $\varepsilon, \delta > 0$ e uma aplicação $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ com $\mathcal{U} := \{V_q \in TM : q \in U; \|V_q\| < \delta\}$ tal que $\varphi(\cdot, V_q)$ é a única geodésica com $\frac{d}{dt}\varphi(t, V_q)|_{t=0} = V_q$ e $\varphi(0, V_q) = q$.

Proposição 3.15. Seja $\varphi(\cdot, V_q)$ geodésica definida em $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Seja $a > 0$ então:

(a) A geodésica $t \rightarrow \varphi(t, aV_q)$ está definida em $(\frac{\varepsilon}{a}, \frac{\varepsilon}{a})$

(b) $\varphi(t, aV_q) = \varphi(at, V_q)$

Proposição 3.16. Dado $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M , um número $\delta > 0$ e uma aplicação $\varphi : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ com $\mathcal{U} := \{V_q \in TM, q \in U, \|V_q\| < \delta\}$ tal que $\varphi(\cdot, V_q)$ é a única geodésica com $\frac{d}{dt}\varphi(t, V_q)|_{t=0} = V_q$ e $\varphi(0, V_q) = q$

3.3.2 Aplicação Exponencial e Lema de Gauss

Aplicação exponencial é um mapa muito importante para a geometria, dentre outras coisas ele nos permitirá andar por geodésicas pela variedade e possuir um bom sistema de coordenadas, as ditas coordenadas normais ou exponenciais. O Lema de Gauss é não só importante para Geometria Riemanniana, mas crucial para o estudo de *Campos de Jacobi*. Esses dois conceitos estarão amplamente presentes no estudo desses campos.

Definição 3.17. A **aplicação exponencial** é definida como:

$$\begin{aligned} \exp_q : B_\delta(0) \subset T_q M &\longrightarrow M \\ V_q &\longmapsto \varphi(1, V_q) \end{aligned}$$

Proposição 3.18. *Seja $q \in M$. Então $d(\exp_q)_0 = Id$ e assim sendo existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\varepsilon(0) \rightarrow M$ é um difeomorfismo sobre um aberto em M*

O aberto em que a exponencial é um difeomorfismo, $B_\varepsilon(0)$ é chamado de **vizinhança ou bola normal**.

Lema 3.19. *Seja $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow M$ aplicação suave. Então:*

$$\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} f$$

Teorema 3.20. (*Lema de Gauss*). *Seja $B_{\tilde{\delta}}(0)$ uma bola em $T_q M$ tal que a restrição da exponencial $\exp_q : B_{\tilde{\delta}}(0) \rightarrow M$ está bem definida. Sejam $\mathbb{S}_{\tilde{\delta}}^{n-1}$ a esfera contida em $B_{\tilde{\delta}}(0)$ com $\delta < \tilde{\delta}$ e $v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}_{\tilde{\delta}}^{n-1}$ curva suave. Defina $f(s, t) = \exp_q(tv(s))$. Então*

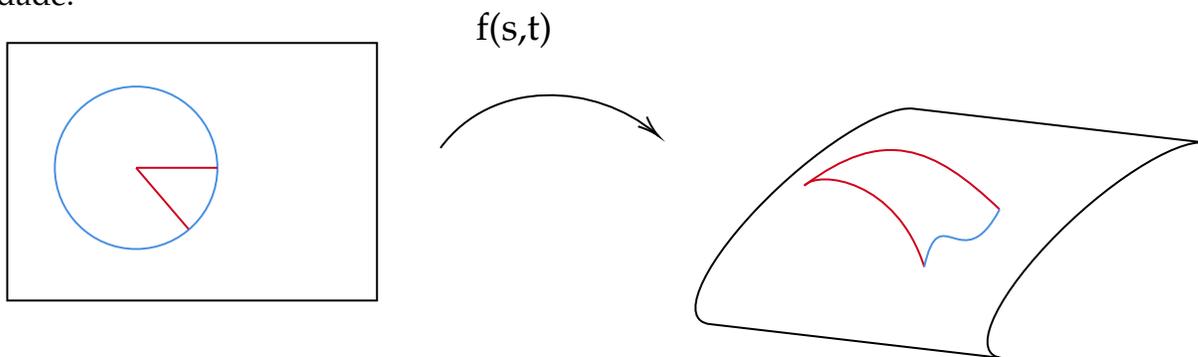
$$g \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) = 0$$

Demonstração. Assim para demonstrar o lema de Gauss é suficiente verificar que a derivada em relação a t da função $g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{f(s,t)}$ é zero para todo t

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \right) &= g\left(\frac{\nabla \partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla \partial f}{\partial t}\right) \\ &= g\left(\frac{\nabla \partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= g\left(\frac{\nabla \partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} |v(s)|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade deve-se ao fato de $f(s, \cdot)$ ser geodésica, a terceira igualdade deve-se ao Lema 3.19 e a última igualdade deve-se ao fato de $v(\cdot)$ ser uma curva contida em uma esfera. □

Segue abaixo uma imagem que representa a aplicação f levando pela exponencial variações de retas no espaço tangente em variações de geodésicas na variedade.



3.3.3 Propriedades Minimizantes

Nossa definição é de que geodésicas são as curvas sem aceleração, porém essa são comumente descritas e utilizadas pela sua propriedade de *minimizar localmente*

caminhos. Nesta parte exibiremos os resultados que garantem isso.

Proposição 3.21. *Seja $B_\delta(q)$ uma bola normal. Defina $\alpha : [0, 1] \rightarrow B_\delta(0)$ como $\alpha(t) = \exp_q(tv)$ com $\|v\| < \delta$. Seja $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ curva suave por partes tal que $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$. Então*

$$L(\alpha) \leq L(\beta)$$

Se a igualdade vale, então as imagens de α e β coincidem.

Teorema 3.22. *Seja (M, g) variedade Riemanniana. Então para cada $q \in M$ existem números $\delta > 0, \varepsilon > 0$ tal que as seguintes afirmações são validas.*

- (a) *Para qualquer $p \in B_\varepsilon(q)$ temos $\exp_p|_{B_\delta(0)}$ é um difeomorfismo eque $B_\varepsilon(q) \subset \exp_p(B_\delta(0))$*
- (b) *Para cada 2 pontos p_1 e p_2 em $B_\varepsilon(q)$ existe um único segmento minimizante de geodésica ligando p_1 a p_2 . Tal segmento fica contido em $B_\varepsilon(q)$ e depende suavemente dos pontos inicial e final.*

Teorema 3.23. *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow (M, g)$ curva suave por partes tal que $d(\gamma(0), \gamma(1)) = L(\alpha)$. Então γ é imagem de uma geodésica.*

3.4 Tensor de Curvatura

Nesta parte definiremos esse objeto que nos permitirá futuramente estender a noção de curvatura conhecida do estudo de Geometria Diferencial Clássica, para o mundo Riemanniano. A curvatura é o primeiro invariante geométrico a ser notado⁷, então é ferramenta crucial para distinguir geometrias e entender suas particularidades.

7. Esse comentário vem do fato que ao expandir o polinômio de Taylor da métrica Riemanniana até segunda ordem tem-se que ele é da forma "métrica Euclidiana + termo de segunda ordem" e o coeficiente do termo de segunda ordem é função da curvatura. Prolongar tal discussão foge o escopo de brevidade destas notas, mas pode ser encontrado no curso de Geometria Riemanniana do prof. Fernando Codá na plataforma Youtube.

3.4.1 Definição

O Tensor de Curvatura pode ser um objeto definido em função de uma conexão afim, posteriormente veremos as particularidades de quando é definido pela Conexão Riemanniana.

Definição 3.24. Seja (E, M, π) um fibrado vetorial com conexão afim ∇ qualquer. Definimos

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (X, Y, \xi) &\longmapsto R(X, Y)\xi \end{aligned}$$

tal que

$$R(X, Y)\xi := \nabla_{[X, Y]}\xi - \nabla_X \nabla_Y \xi + \nabla_Y \nabla_X \xi$$

R é chamado de **Tensor de Curvatura**.

Proposição 3.25. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\xi \in \Gamma(E)$ e $f, g, h \in C^\infty(M)$. Então:

- (a) R é trilinear.
- (b) $R(X, Y) = -R(Y, X)$
- (c) $R(fX, gY)h\xi = fghR(X, Y)\xi$.

Isso nos mostra que R é realmente um objeto tensorial, ou seja pode ser descrito pontualmente, merecendo o nome de *tensor de curvatura*. Agora veremos uma propriedade que segue da definição e mostra a primeira interpretação da curvatura, uma medida da falta de comutatividade da Derivada Covariante.

Proposição 3.26. Seja $\varphi : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow M$ uma aplicação suave e $V \in \Gamma(\varphi^*E)$ então:⁸

$$\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial s} V - \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\nabla}{\partial t} V = R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) V$$

8. As contas aqui feitas em $\Gamma(\varphi^*E)$ podem ser vistas analogamente às em $\Gamma(\alpha^*E)$. Um leitor interessado nos detalhes pode ler sobre *Fibrado Pull-Back* no capítulo 3 de [1].

Definição 3.27. O *tensor de curvatura* dado pela Conexão Riemanniana e o fibrado TM será chamado **Tensor de Curvatura Riemanniano** e será representado por R a daqui em diante, a menos que dito o contrário.

Agora veremos algumas propriedades de R que seguem diretamente de contas com a definição.

Proposição 3.28. Para $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ temos que:

- (a) $g(R(X, Y)Z, T) + g(R(Y, Z)X, T) + g(R(Z, X)Y, T) = 0$. (*Primeira Identidade de Bianchi.*)
- (b) $g(R(X, Y)Z, T) = -g(R(X, Y)T, Z)$.
- (c) $g(R(X, Y)Z, T) = g(R(Z, T)X, Y)$.

3.4.2 Curvatura Riemanniana

Definiremos e discutiremos sobre *Curvatura Riemanniana*, ou *curvatura seccional*, muito brevemente para focar no objetivo que é falar sobre *Campos de Jacobi*, outras formas de curvatura serão omitidos por motivos de brevidade, o leitor interessado pode ler em [1] ou [3].

Definição 3.29. Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional e $X, Y \in \sigma$ vetores linearmente independentes. Então definimos a **Curvatura Riemanniana, ou seccional** em σ como:

$$K(X, Y) := \frac{g(R(X, Y)X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - (g(X, Y))^2}$$

É possível provar tanto que $K(\sigma)$ não depende da escolha de base de σ como também provar que saber as curvaturas de cada subespaço bi-dimensional do espaço tangente no ponto p nos permite reconstruir o tensor R no ponto p .

Nossa próxima proposição servira como um exemplo de estrutura interessante que uma Variedade Riemanniana pode ter, mas também nos será útil posteriormente. Trata-se das variedades que possuem Curvatura Riemanniana constante, esses são exemplos interessantes de Variedades Riemannianas quem possuem muitas simetrias.

Proposição 3.30. (M, g) tem curvaturas riemannianas constantes iguais a K_0 se e somente se

$$g(R(X, Y)Z, T) = K_0(g(X, Z)g(Y, T) - g(X, T)g(Y, Z))$$

3.5 Campos de Jacobi

3.5.1 Intuição

Nossa intuição para *Campos de Jacobi* é que queremos estudar propriedades de curvas, em particular geodésicas, e para isso uma técnica comum é realizar processos variacionais com as curvas. Desejamos então criar uma variação de uma geodésica feita por geodésicas.

Como a Aplicação Exponencial nos permite andar pela variedade através de geodésicas, estudar derivadas dela nos deve dar campos variacionais para nossa desejada variação de geodésicas.

Começaremos com uma definição a priori nada intuitiva de um *Campo de Jacobi*, através da *Equação de Jacobi*, depois notaremos que essa definição não só é a que procuramos como veremos que nossas intuições se concretizam.

3.5.2 Definição e Propriedades

Definição 3.31. Seja $\alpha : I \rightarrow (M, g)$ geodésica em uma variedade Riemanniana M com dimensão n . Um campo suave J ao longo de α é chamado **Campo de Jacobi** se ele atende a *Equação de Jacobi*:

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J + R(\alpha', J)\alpha' = 0$$

Como vemos a seguir todo vetor velocidade de uma variação por geodésica é um campo de Jacobi.

Proposição 3.32. Seja $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ uma aplicação suave tal que $f(s, \cdot)$ é geodésica para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ é campo de Jacobi ao longo da geodésica $t \rightarrow \alpha(t) = f(0, t)$

Demonstração. Temos por hipótese a primeira igualdade a baixo, a segunda vem do Lema 3.19 e a terceira pela Proposição 3.26, por fim utilizamos que $f(s, \cdot)$ é geodésica para todo s .

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} \\ &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} - R \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= -R(\alpha', J) \alpha' \end{aligned}$$

□

Pelos comentários da intuição esperamos que a recíproca do resultado anterior seja verdadeiro, ou seja, todo campo de Jacobi seja obtido por variações de geodésicas, isso será provado em breve. Mas, primeiramente veremos a *Equação de Jacobi* como uma Equação Diferencial e através de resultados básicos de EDO deduziremos algumas propriedades básicas dos *Campos de Jacobi*.

Sejam J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica α e $t \rightarrow \{e_i(t)\}_{i=0, \dots, n-1}$ um referencial ortonormal paralelo ao longo de α onde $e_0 := \alpha' / |\alpha'|$. Neste caso para

$$J(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(t) e_i(t)$$

temos

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J = \sum_{i=0}^{n-1} f_i''(t) e_i(t)$$

Concluimos então que a equação de Jacobi pode ser escrita como

$$f_j''(t) + \sum_i f_i g(R(\alpha', e_i) \alpha', e_j) = 0 \quad \forall j \quad (3.1)$$

Em termos matriciais temos

$$J'' + BJ = 0 \quad (3.2)$$

onde $B = (b_{ij})$ e $b_{ij} = g(R(\alpha', e_i) \alpha', e_j)$. Note que $b_{ij} = b_{ji}$ e $b_{0j} = 0$. As equações acima nos permite inferir algumas conclusões imediatas sobre campos de Jacobi as quais resumimos na proposição a seguir.

Proposição 3.33. (a) Se $V, W \in T_{\alpha(0)}M$ então existe um único campo de Jacobi J ao longo da geodésica $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $J(0) = V$ e $\frac{\nabla}{dt}J(0) = W$

(b) Existem $2n$ campos de Jacobi linearmente independentes.

(c) α' e $t\alpha'$ são campos de Jacobi, os quais são soluções de $f_0'' = 0$

(d) Existem $2(n - 1)$ campos de Jacobi perpendicular à α (não necessariamente ortogonais entre si).

(e) $g(J, \alpha') = t g(J'(0), \alpha') + g(J(0), \alpha'(0))$

Demonstração. Os itens (a),(b), (c) são imediatos. O item (d) segue da equação 3.2 levando em conta que $b_{0j} = 0$. Para verificar o item (e) basta observar que

$$\begin{aligned} g(J, \alpha') &= |\alpha'| f_0 \\ &= |\alpha'| (t f_0'(0) + f_0(0)) \\ &= |\alpha'| \left(\text{tg} \left(J'(0), \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|} \right) + g \left(J(0), \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|} \right) \right). \end{aligned}$$

□

Com isso mostraremos que nossa intuição inicial está certa e todo Campo de Jacobi é campo (velocidade) de uma variação por geodésicas.

Proposição 3.34. Seja J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$. Considere uma curva $\beta : (-1, 1) \rightarrow W$ com $\beta'(0) = J(0)$, um campo $s \rightarrow V(s)$ ao longo de β com $V(0) = \alpha'(0)$ e $\frac{\nabla}{ds}V(0) = \frac{\nabla}{dt}J(0)$. Suponha que a variação $f(s, t) := \exp_{\beta(s)}(tV(s))$ está bem definida. Então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$

Demonstração. Observe que $\frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = J(0)$. Devemos verificar que $\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = \frac{\nabla}{dt}J(0)$ e o resultado seguirá pela Proposição 3.32 e pela unicidade de EDO. Para

tanto basta observar que

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(0,0) &= \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}(0,0) \\
&= \frac{\nabla}{ds} \left(d \left(\exp_{\beta(s)} \right)_0 V(s) \right) \Big|_{s=0} \\
&= \frac{\nabla}{ds} (V(s)) \Big|_{s=0} \\
&= \frac{\nabla}{dt} J(0)
\end{aligned}$$

□

Para construir uma curva β tal que $\beta'(0) = J(0)$ basta fazer o seguinte processo: Sejam $s \rightarrow X(s)$ e $s \rightarrow Y(s)$ os campos paralelos ao longo de β com $X(0) = \alpha'(0)$ e $Y(0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$. O campo $s \rightarrow V(s)$ pode então ser definido como $V(s) := X(s) + sY(s)$. Se a aplicação exponencial está sempre bem definida, e.g., M compacta ou M completa⁹ então f está bem definida. Caso contrário, pode-se proceder da seguinte forma. Primeiro verifica-se que f está certamente bem definida para intervalos pequenos de s e t . Depois, grudando variações f_i ao longo de γ podemos construir a desejada variação f .

É conveniente considerar o caso particular de campos de Jacobi com $J(0) = 0$.

Corolário 3.35. *Suponha que $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow M$ está bem definida e seja $B := \exp_p(B_\delta(0))$. Seja J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $\alpha \subset B$ com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt} J(0) = W$. Então*

$$J(t) = d \left(\exp_p \right)_{t\alpha'(0)} tW$$

Demonstração. Basta considerar na demonstração anterior a curva $\beta(s) = p$ e um campo $V(s) = \sum_i a_i(s)e_i(p)$ com $V(0) = \alpha'(0)$ e $V'(0) = W$ Observe que

$$\frac{\nabla}{ds} V(0) = V'(0) = \sum_i a'_i(0)e_i(p)$$

9. Este tópico é discutido no estudo de Teorema de Hopf-Rinow, que pode ser visto no capítulo 7 de [3] e capítulo 6 de [1].

O resultado segue observando que

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = d \left(\exp_p \right)_{tV(0)} tV'(0)$$

□

Por vezes é conveniente reescrever o corolário acima em termos de variações. Ou seja, se J é um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica α com $J(0) = 0$ e $W = \frac{\nabla}{dt}J(0)$ então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ onde $f(s, t) = \exp_p(tV(s))$ e $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_pM$ é curva com $V'(0) = W$ e $V(0) = \alpha'(0)$

4 Aplicações

Nesta última sessão estudaremos aplicações desta ferramenta, Campos de Jacobi, com um discussão detalhada de alguns resultados iniciais e uma visão panorâmica de outros mais profundos.

4.1 Primeiras Aplicações

Aqui exploraremos duas aplicações clássicas de Campos de Jacobi, estudo local das variedades de curvatura Riemanniana constante e os pontos críticos da função exponencial, que culminarão em novos objetos interessantes e serão a primeira amostra de como esta ferramenta pode ser útil.

4.1.1 Espaços de Curvatura Constante

Consideraremos agora campos de Jacobi em espaços de curvatura constante.

Proposição 4.1. *Sejam (M, g) variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ geodésica com vetor velocidade 1. Então o campo de Jacobi J ao longo de α com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt}J(0) = w$ para w perpendicular a $\alpha'(0)$ é $J(t) = c_K(t)w(t)$ onde $w(\cdot)$ é o transporte paralelo de w ao longo de α e c_K é a função definida como $c_K(t) := \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}$ se $K > 0$, $c_K(t) := t$ se $K = 0$ e $c_K(t) := \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}$ se $K < 0$*

Demonstração. Considere o campo $\tilde{J}(t) := c_K(t)w(t)$. Sabemos pela Proposição 3.30 que

$$g\left(R\left(\alpha', \tilde{J}\right)\alpha', e_i\right) = K g\left(\tilde{J}, e_i\right)$$

Assim

$$R\left(\alpha', \tilde{J}\right)\alpha' = K\tilde{J}$$

Logo o campo \tilde{J} atende a equação de Jacobi, vide demonstração de 3.32, ou seja

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} \tilde{J} + K\tilde{J} = 0$$

O resultado segue da unicidade das soluções da equação de Jacobi, dado condições iniciais. □

Então, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 4.2. *Seja M variedade Riemanniana com curvatura constante K . Suponha que $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow M$ está bem definida. Seja $f(s, t) = \exp_p(tv(s))$ onde $v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1^{n-1} \subset T_p M$ é curva com $|V'(0)| = 1$ e $|t| < \delta$. Então $|J(t)| = |c_K|$ onde c_K foi definido na proposição anterior e $J(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$*

Pode-se ainda estimar $|J|$ caso M não possuía curvaturas seccionais constante, com uma expansão de Taylor. De fato sejam f e J definidos como no corolário anterior.¹⁰ Então:

$$\begin{aligned} |J(t)|^2 &= t^2 - \frac{1}{3}K(p, \sigma)t^4 + O(t^4) \\ |J(t)| &= t - \frac{1}{6}K(p, \sigma)t^3 + O(t^3) \end{aligned}$$

onde σ é o espaço bi-dimensional gerado por $V(0)$ e $V'(0)$.

A seguir iremos utilizar nosso conhecimento sobre campos de Jacobi em espaços de curvatura constante para descrever a métrica g em termos de coordenadas

10. As contas que demonstram esta fórmula podem ser vistas no capítulo 5 de [3], a demonstração foi omitida por se tratar de contas rotineiras e que oferecem pouco insight sobre o objeto.

geodésicas polares, definidas na proposição. Tal descrição implicará em particular que variedades Riemannianas de mesma curvatura constante são localmente isométricas.

Proposição 4.3. *Sejam (M^n, g) variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\psi : (0, \delta) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow B_\delta(p)$ parametrização geodésica polar, i.e., $\psi(r, v) := \exp_p(rAv)$ onde $A : (\mathbb{R}^n, g_0) \rightarrow (T_p M, g)$ é isometria linear. Então a métrica g em coordenadas geodésicas polares é $dr^2 + (c_K(r))^2 ds^2$ onde ds^2 é a métrica canônica da esfera \mathbb{S}^{n-1} e a função c_K foi definida na Proposição 4.1.¹¹ Em particular, duas variedades Riemannianas com mesma dimensão e mesmas curvaturas seccionais constantes iguais a K são localmente isométricas.*

Demonstração. Seja $\{e_i\} \subset T_v \mathbb{S}^{n-1}$ referencial ortonormal. Pelo Corolário 3.35

$$\begin{aligned} J_i(r) &:= d \left(\exp_p \right)_{rAv} rAe_i \\ &= d\psi_{(r,v)}(0, e_i) \end{aligned}$$

é campo de Jacobi ao longo da geodésica $r \rightarrow \exp_p(rAv)$. Utilizando Proposição 4.1 podemos verificar que

$$g(J_i, J_j) = \delta_{i,j} c_K^2 \quad (4.1)$$

Por fim defina

$$\begin{aligned} J_0(r) &:= d \left(\exp_p \right)_{rAv} Av \\ &= d\psi_{(r,v)}(1, 0) \end{aligned}$$

e utilizando o Lema de Gauss, Lema 3.20, concluímos que

$$g(J_0, J_i) = 0 \quad (4.2)$$

O resultado então seguirá das equações 4.1 e 4.2. □

11. Um leitor atento consegue notar uma semelhança entre esta formula para a métrica e a apresentada no exemplo 3.5 isso ocorre pois aquelas coordenadas polares são um exemplo de coordenadas geodésicas polares, apesar de não necessariamente a curvatura lá ser constante.

4.1.2 Pontos Críticos da Aplicação Exponencial, Pontos Conjugados.

Terminamos a nossa discussão sobre campos de Jacobi com alguns comentários sobre pontos conjugados.

Seja $\alpha : [0, a] \rightarrow (M, g)$ geodésica. O ponto $\alpha(t_0)$ é conjugado a $\alpha(0)$ ao longo de α se existe um campo de Jacobi J ao longo de α com $J(0) = 0 = J(t_0)$

O número máximo de campos linearmente independentes é chamado multiplicidade de $\alpha(t_0)$.

Exemplo 4.4. Seja $\alpha : [0, \pi] \rightarrow S_1^n$ geodésica, i.e., um segmento de um grande círculo, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(\pi) = -p$. Então $\alpha(\pi)$ é ponto conjugado a $\alpha(0)$ com multiplicidade $n - 1$.

Note que, pela proposição 3.33 temos que a multiplicidade máxima de um ponto conjugado em uma variedade Riemanniana de dimensão n é $n - 1$. A nossa próxima proposição mostra a relação entre Pontos Conjugados e Pontos Críticos da Aplicação Exponencial.

Proposição 4.5. Sejam $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow M$ bem definida, $t \rightarrow \alpha(t) := \exp_p(tV_0)$ com $|t| < \delta$ e $|V_0| = 1$. Então $\alpha(t_0)$ é conjugado a $\alpha(0)$ com multiplicidade k se e somente se $\dim \left(\ker d \left(\exp_p \right)_{t_0V_0} \right) = k$.

Demonstração. Basta observar que as afirmações abaixo são todas equivalentes.

- J_1, \dots, J_k são campos de Jacobi linearmente independentes com $J_i(0) = J_i(t_0) = 0$
- $J_i(t) = d \left(\exp_p \right)_{t_0V_0} (L_0W_i)$ com W_i linearmente independentes e $J_i(t_0) = 0$, onde $1 \leq i \leq k$
- W_i são linearmente independentes e $W_i \in \ker d \left(\exp_p \right)_{t_0V_0}$, onde $1 \leq i \leq k$

□

Proposição 4.6. Seja $\alpha : [0, a] \rightarrow (M, g)$ uma geodésica. Suponha que $\alpha(a)$ não é conjugado a $\alpha(0)$ ao longo de α . Então dado $X \in T_{\alpha(0)}M$ e $Y \in T_{\alpha(a)}M$ existe um único campo de Jacobi ao longo de α tal que $J(0) = X$ e $J(a) = Y$

Demonstração. Seja $\mathcal{J}_{0,a}$ o espaço dos campos de Jacobi com $J(0) = 0$. Defina a aplicação $A : \mathcal{J}_{0,a} \rightarrow T_{\alpha(a)}M$ como $A(J) := J(a)$. Claramente A é aplicação linear. Como $\alpha(a)$ não é ponto conjugado, concluímos que A é injetora. Como os espaços vetoriais $\mathcal{J}_{0,a}$ e $T_{\alpha(a)}M$ tem dimensão n concluímos que A é um isomorfismo. Este fato implica então que existe um campo J_1 com $J_1(0) = 0$ e $J_1(a) = Y$. Por raciocínio análogo obtemos um campo de Jacobi J_2 com $J_2(0) = X$ e $J_2(a) = 0$. Por fim defina $J = J_1 + J_2$. A unicidade segue do fato de $\alpha(a)$ não ser ponto conjugado a $\alpha(0)$. □

4.2 Resultados Notáveis e Futuros Estudos

Segue lista de alguns resultados e investigações que os *Campos de Jacobi* permitem, servindo também de recomendação para futuro estudo do leitor:

- Classificação das Variedades Simplesmente Conexas de Curvatura Riemanniana constante. (Pela discussão feita anteriormente, em que se provam resultados locais, é possível usando técnicas de recobrimento e mais teoria provar que essas variedades são essencialmente \mathbb{R}^n , S^n e \mathbb{H}^n e estudar outras variedades de curvatura constante através de quocientes.) [vide capítulo 8 de [3] e capítulo 7 de [1].]
- É possível fazer um estudo da Geometria do Espaço de Pontos Conjugados de um dado ponto. Esse espaço é, em geral, uma curva com quatro pontos singulares. [vide comentários no capítulo 5 e 13 de [3]. No capítulo 5 tem a citação do artigo com a demonstração de tal resultado.]
- O estudo dos pontos conjugados é crucial para o estudo dos pontos mínimos de uma variedade, que dão origem a definição de *cut locus* importante na discussão sobre o *Teorema da Esfera* um dos teoremas principais do livro [3], que reserva o capítulo 13 para a discussão de tal Teorema.

Referências

- [1] M. M. Alexandrino, *Introdução a Geometria Riemanniana*, Notas de Aula (2019) <https://www.ime.usp.br/malex/teachingnew.htm>

<https://www.ime.usp.br/~malex/arquivos/lista2019/GeoRiemanniana-Main-novo2019.pdf>

- [2] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, Jacques Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Third Edition, Springer. 2004
- [3] M. P. Do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA (2015).