

UM ENSAIO SOBRE OPERADOR DE DIRAC E APLICAÇÕES

GUILHERME CERQUEIRA

RESUMO. O Objetivo destas notas é criar uma diagonal da teoria que constrói o *Operador de Dirac*, em particular o dito Dirac Geométrico, vide 1.9. Para isso, começa-se com o exemplo explícito em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2$ baseado nas *Matrizes de Pauli* e desdobra-se a teoria com um paralelo desse exemplo. As notas são um grande resumo e apanhado de construções e fatos de diferentes fontes como as principais sendo [8, 11, 7, 9, 13] procurando dar uma introdução a teoria que seja motivada e rápida. A Seção 1 foca no exemplo explícito e em dar uma imagem geral do que será feito, a Seção 2 define as estruturas necessárias que foram destacadas na Seção 1, por fim a Seção 3 dá um apanhado de algumas aplicações que a teoria pode ter, focando em ligar Geometria com Topologia e Geometria com Análise.

SUMÁRIO

1. Introdução e Motivação	1
1.1. Matrizes de Pauli e Exemplo Protótipo do Operador de Dirac	2
1.2. Operador de Dirac Geométrico: Primeira Visão	4
2. Estruturas Preliminares	5
2.1. Álgebras de Clifford	6
2.2. Fibrados de Clifford e Operador de Hodge-deRham	7
2.3. Espinores e Estruturas Spin	8
2.4. Fibrados Espinoriais e Operador de Dirac Espinorial	11
3. Operador de Dirac Geométrico e Aplicações	13
3.1. Preliminares	13
3.2. Operador de Hodge-de Rham	14
3.3. Operador de Spin Dirac	16
4. Agradecimentos	17
Referências	17

1. INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

Existem muitas formas de introduzir esta teoria, que pode ser vista em livros tanto de matemática como de física, mas em muito casos essas abordagens não conversam de forma coesa nas bibliografias. Sendo assim, a literatura é esparsa e comumente feita após muitas páginas de teoria robusta. O objetivo destas notas é ter uma diagonal da teoria focando em motivar o leitor de que o *Operador de Dirac* nasce em contextos matemáticos naturais e tem boas aplicações. Para sair da contextualização para as aplicações um breve diagonal sobre a teoria com referências é exposta também no texto com objetivo de dar ao leitor os mínimos requisitos necessários para apreciar a teoria. Uma primeira visão será construída nesta seção baseada no seu exemplo fundamental vindo das *Matrizes de Pauli* (Definição 1.1). Na Seção 2 veremos de forma bem breve o essencial teórico para dar sentido ao *Operador de Dirac*. Por fim, na Seção 3 entenderemos melhor quem é esse operador e veremos algumas aplicações das construções aqui apresentadas, como alguns teoremas sobre *Teoria de Índices* e também como ele pode ser uma ferramenta para provar resultados Geométricos/Topológicos sobre Variedades que a primeira vista nada teriam a ver com o *Operador de Dirac*.

1.1. Matrizes de Pauli e Exemplo Protótipo do Operador de Dirac. Na *Mecânica Hamiltoniana Clássica*, possuíamos um *espaço de configurações* M , *variedade suave* e o *Espaço de Fases* T^*M , *fibrado cotangente* e entender a dinâmica de um sistema era estudar seções desse fibrado em particular em relação a um operador o *Hamiltoniano* que determina as *Equações de Hamilton*, para o leitor que deseja aprender *Mecânica Clássica* recomendo olhar o [4] ou [6] apesar de que nada sobre Mecânica Hamiltoniana será usado além de motivação contextual. Para fins da *Mecânica Quântica* nosso *Espaço de Fases* será um *Espaço de Hilbert* no caso que construiremos nesta seção será o conjunto das funções suaves $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ em particular serão interessantes as suaves que são L^2 integráveis¹ elas serão vistas como seções do fibrado trivial $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2$ sobre \mathbb{R}^3 .

Definição 1.1. As Matrizes de Pauli são:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Com elas construiremos nosso exemplo de *Operador de Dirac* que pode usado para estudar em mais detalhes a Equação de Schrödinger 1.7 e generalizações desse operador nos permitem estudar generalizações da Equação de Schrödinger. Elas terão propriedades algébricas interessantes, vide Proposição 1.2 e 1.3.

Proposição 1.2. As Matrizes de Pauli $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ (vide Definição 1.1) satisfazem:²

- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
- $[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{jkl}\sigma_l$
- $\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}I$

Demonstração. Contas com as matrizes. □

Antes de definirmos nosso exemplo de operador de Dirac, veremos algumas propriedades das *Matrizes de Pauli* quando multiplicadas por i , ou seja, do conjunto $\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$. Esse conjunto posteriormente será nosso protótipo para depois ser generalizado para *Álgebras de Clifford* (Definição 2.1).

Proposição 1.3. As Matrizes de Pauli multiplicadas por i $\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$ (vide Definição 1.1) satisfazem:

- (1) $\text{span}_{\mathbb{R}}(\{I, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}) \cong \mathbb{H}$.³
- (2) A álgebra real gerada por $\{\frac{i\sigma_1}{2}, \frac{i\sigma_2}{2}, \frac{i\sigma_3}{2}\}$ é isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$.

Demonstração. (1) Basta tomar o isomorfismo que leva:

$$1 \mapsto I, \mathbf{i} \mapsto i\sigma_3, \mathbf{j} \mapsto i\sigma_2, \mathbf{k} \mapsto i\sigma_1$$

- (2) Contas com matrizes. □

Com a segunda afirmação da proposição 1.3, as *Matrizes de Pauli multiplicadas por i* são geradores infinitesimais de $SU(2)$ e com eles podemos obter o recobrimento 2 para 1 de $SU(2)$ sobre $SO(3)$ através da representação adjunta de $SU(2)$, pois $\pm A \in SU(2)$ gera a mesma representação e $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$. Como $SU(2)$ é *simplesmente conexa* então é *recobrimento universal* de $SO(3)$ que representa rotações em \mathbb{R}^3 , isso motiva nossa próxima definição

¹A condição de ser L^2 integrável vem das características probabilísticas da *Mecânica Quântica*, pois deve os estados devem pertencer a uma distribuição de probabilidade e que por simplicidade brevidade não serão ressaltadas aqui mas podem ser encontradas em riqueza de detalhes em [5, 13], o primeiro com abordagem mais matemática o segundo mais física.

²Em que ε_{jkl} é o símbolo de Levi-Civita, δ_{jk} o Delta de Kronecker e $\{, \}$ o anti-comutador (ou seja, $\{A, B\} = AB + BA$).

³Vale lembrar que $SU(2) \cong S^3$ que é isomorfo aos *Quatérnios Unitários*, como *Grupos de Lie*.

Definição 1.4. Denomina-se o recobrimento universal de $SO(n)$, para $n \geq 3$ por **Grupo Spin** denotado por $Spin(n)$.⁴

Vale comentário de que $Spin(3) \cong SU(2) \cong Sp(1)$, $Spin(4) \cong SU(2) \times SU(2) \cong Sp(1) \times Sp(1)$, $Spin(5) \cong Sp(2)$, $Spin(6) \cong SU(4)$, parte desses comentários são tirados de exercícios e comentários ao longo do capítulo 1 de [1], para mais detalhes o livro é uma boa referência, uma outra referência é o capítulo 2 de [9].

Na Seção 2 veremos que \mathbb{H} é um exemplo de *Álgebra de Clifford* (vide Definição 2.1) em particular $Cl_2(\mathbb{R})$ que conectarão generalizações do *Grupo Spin* com generalizações de $\mathfrak{su}(2)$, veremos que o *Grupo Spin* pode ser visto como um grupo dentro da *Álgebra de Clifford*.

Agora definiremos um operador que age nas seções do fibrado $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2$, em particular em $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, que será nosso exemplo protótipo de *Operador de Dirac*.

Definição 1.5. Seja $D : \Gamma(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2) \rightarrow \Gamma(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2)$ tal que:

$$D := \sum_{j=1}^3 i\sigma_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

em que $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ são as *Matrizes de Pauli* vide 1.1, D é o **Operador de Dirac** relativo a $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2$.

Uma das utilidades e características do *Operador de Dirac* até em suas formas mais gerais é que ele representa uma forma de tirar a raiz quadrada do *Laplaciano*, ou em casos mais gerais de um *Laplaciano Generalizado* (a grosso modo um laplaciano de seções em fibrado e não apenas de funções em M), isso que verificaremos em seguida para o operador da Definição 1.5 mostrando

Proposição 1.6. *O Operador de Dirac definido em 1.5 é raiz quadrada do Laplaciano Geométrico*⁵, logo podemos entender o espectro do Laplaciano através do seu espectro.

Demonstração. Como o i e as matrizes de pauli comutam com a diferencial, temos que:

$$D^2 = \sum_{k=1}^3 (-1)\sigma_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \sum_{k,j=1;k < j}^3 (-1)\{\sigma_k, \sigma_j\} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Pela Proposição 1.2 temos que $\{\sigma_k, \sigma_j\} = 0$ para quaisquer $k \neq j$ e $\sigma_j^2 = I$ para qualquer j .

Então $D^2 = -\Delta$.

Comparação dos autovalores vem de se $D^2X = \lambda X \Rightarrow [(D - \sqrt{\lambda}I)(D + \sqrt{\lambda}I)]X = 0$.

□

Uma das estratégias para escrever casos específicos da *Equação de Schrödinger* é vê-la como quantização de *Equações de Hamilton*, discussões precisas sobre *Quantização* e as *Equações de Schrödinger* em si foge completamente do escopo destas notas, mas podem ser vista em [11, 13] respectivamente. Veremos brevemente um caso particular para exemplificar o contexto em que esses objetos estavam quando estudados pela primeira vez.

Definição 1.7. Podemos entender **uma versão**, sem energia potencial,⁶ da **Equação de Schrödinger em Dimensão 3**, a menos de constantes físicas, para o problema que estamos a estudar é:

$$\frac{d}{dt}\psi(x, t) = -i\Delta\psi(x, t)$$

⁴Aqui defino somente para $n \geq 3$ pois está não é a definição padrão do *Grupo Spin*, mas sim sua principal propriedade e o motivo para estudarmos ele, aqui foi feito assim para favorecer a visão panorâmica da primeira seção. Os detalhes sobre *Grupo Spin* e sua outra visão serão vistos na Seção 2.

⁵Laplaciano Geométrico é nada mais que $-\Delta$.

⁶Também conhecida como equação livre de Schrödinger segundo capítulos 3 e 4 de [5].

Então, para entender soluções dessa equação ter um operador que quadra para o Laplaciano é algo útil, no mínimo na comparação direta entre seus espectros, dado que o *Operador de Dirac* é um Operador Diferencial Parcial de primeira ordem diferentemente do Laplaciano que é de segunda. A noção geral de *Operador de Dirac* terá como objetivo criar operadores de primeira ordem que quadrem para *Laplacianos Generalizados*, como comentado anteriormente, porém suas generalizações também permitirão interagir com quantizações mais sofisticadas e dentre outras coisas estudar versões mais gerais das *Equações de Schrödinger* vide [13], ao passo que a *Equação de Schrödinger* é justamente uma dinâmica não relativística.

1.2. Operador de Dirac Geométrico: Primeira Visão. Agora discutiremos uma definição geral do *Operador de Dirac* fazendo um paralelo com o exemplo desta seção. Com isso ficará explícito para onde nos encaminharemos nas próximas seções e o motivo de estudarmos tais estruturas. Esta discussão é fortemente baseada no capítulo 11 de [11], mas ao invés de começar com a modo mais geral, nos restringiremos ao dito *Operador de Dirac Geométrico* (vide 1.9), ele é definido em *Fibrados de Dirac* (vide Definição 1.8), deles tiraremos nossos exemplos e aplicações, como também as estruturas que aparecerão na Seção 2. Para mais detalhes e generalizações de *Operadores de Dirac* as notas [11] é uma fonte valiosa.

Apesar de *Operadores de Dirac Geométricos* serem gerais o suficiente para nossas necessidades a definição mais geral pode ser vista logo ao início de [11], vale também notar que não é esperado que o leitor entenda estas definições de imediato, pois algumas das estruturas serão definidas posteriormente, elas servem para mostrar o que está por vir; mantendo o leitor com onde queremos chegar em mente; e fazer um paralelo direto entre nosso exemplo protótipo da Definição 1.5 com a Definição 1.9 que é nosso caso gera para que o leitor entenda a importância do exemplo e siga a teoria com mais naturalidade. Antes da definição segue um paralelo direto do exemplo construído com a definição após:⁷

<i>Matrizes de Pauli multiplicadas por i, $Cl_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{H}$</i>	\mapsto	$Cl(V)$.
<i>Multiplicação de Matriz</i>	\mapsto	c (<i>Produto de Clifford</i>).
<i>Fibrado Trivial, $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2$</i>	\mapsto	E (<i>Fibrado de Clifford/Espinorial</i>).
<i>Funções de suaves \mathbb{R}^3 para \mathbb{C}^2, $\Gamma(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2)$</i>	\mapsto	$\Gamma(E)$.
<i>Operador de Dirac Definição 1.5, $D = i\sigma_j \frac{\partial}{\partial x^j}$</i>	\mapsto	$D = c \circ \nabla$.

Definição 1.8. Um **Fibrado de Dirac** sobre uma *Variedade Riemanniana Orientada* (M, g) é uma quadrupla $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla, c)$, que satisfaz:

- (1) $E \rightarrow M$ é um *Fibrado Vetorial Complexo* sobre M munido com uma *métrica Hermitiana* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- (2) A *Conexão* $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$ é *compatível* com a *estrutura Hermitiana* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- (3) E admite *estrutura de Clifford* (vide Definição 2.4) e ela é *compatível* com as estruturas já listadas, ou seja:
 - E é um *Fibrado de Módulos de Clifford* (*Fibrado de Clifford*, vide Definição 2.4). Ou seja, $c : \Omega^1(M) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(E)$ é um morfismo de fibrados reais, tal que $\{c(v), c(u)\} = -2g(v, u)I$.⁸
 - Além disso, a *Multiplicação de Clifford* (vide Definição 2.4) c por vetores tangentes é anti-adjunta fibra a fibra com respeito a *estrutura Hermitiana*.
 - Por fim, pede-se que $\nabla c = 0$; ou seja c é covariantemente constante em relação a ∇ .⁹

⁷Vale o comentário de que apesar de o paralelo feito na tabela ser correto, a construção deste exemplo é mais específica do que meramente um Operador de Dirac, é o caso especial de um Dirac Espinorial ou Spin Dirac. Sendo assim o modo mais preciso de representar \mathbb{H} é como $Cl^+(\mathbb{R}^3) = Cl_3^+(\mathbb{R})$, mas avalei que fazer esta diferenciação neste esteja só traria mais confusão ao leitor.

⁸Note que a última relação, que usa o *anti-comutador*, é satisfeita por $\mathfrak{su}(2)$ vide Proposições 1.2 e 1.3

⁹A Equação $\nabla c = 0$ pode ser vista como: para quaisquer $\alpha \in \Omega^1(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $u \in \Gamma(E)$ $\nabla_X(c(\alpha)u) = c(\nabla_X^M \alpha)u + c(\alpha)(\nabla_X u)$, em que ∇^M denota a *Conexão de Levi-Civita* em T^*M .

Assumindo que M admita uma *Estrutura Spin* (vide Definição 2.18), pode-se notar que um *Fibrado Espinorial* (vide Definição 2.21) é um *Fibrado de Dirac*, porém nem todo *Fibrado de Dirac* admite *Estrutura Spin* como será discutido no final da Seção 2 e na Seção 3.

Com a definição de um *Fibrado de Dirac* podemos definir um *Operador de Dirac* canonicamente no fibrado que será o *Operador de Dirac Geométrico*. Com essa Definição 1.8 também fica claro que objetos definiremos posteriormente, pois as condições (1) e (2) da definição entendemos do estudo de Fibrados, mas precisamos entender essa estrutura de produto diferente vinda da *Álgebra de Clifford* e também as noções sobre *Estrutura Spin* e os *Fibrados Espinoriais*.

Definição 1.9. Seja $(E, \langle, \rangle, \nabla)$ um *Fibrado de Dirac* sobre uma *Variedade Riemanniana Orientada* (M, g) . Então existe um *Operador de Dirac* em E associado canonicamente com a *estrutura de Dirac* dado por:¹⁰

$$D = c \circ \nabla : \Gamma(E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{c} \Gamma(E)$$

Esse *Operador de Dirac* associado canonicamente a *Estrutura de Dirac* é dito **Operador de Dirac Geométrico**.

Do ponto de vista local temos: dado um referencial local $\{e_i\}$ temos $D = \sum_i c(e_i) \nabla_{e_i}$, que pela definição abstrata independe da escolha de referencial. Vale notar que a *métrica Riemanniana* g em M nos permite uma identificação entre $\Gamma(T^*M \otimes E)$ e $\Gamma(TM \otimes E)$.

Veremos futuramente que não só este *Operador de Dirac Geométrico* quadra para um *Laplaciano Generalizado* como também representa o *Laplaciano* somado de um *resto* que terá interpretações Geométricas e nos permitirá conectar Geometria e Topologia.

Há uma gama de operadores que entram na definição de *Operador de Dirac Geométrico*, veremos nas Seções 2 e 3, mas as *estruturas Spin* e correlatos são estruturas adicionais que colocaremos sobre a variedade para definir um tipo ainda mais especial de *Operador de Dirac Geométrico* que será o *Dirac Espinorial* ou *Spin Dirac*. Nesse contexto, notar-se-a que o nosso exemplo protótipo é um caso *espinorial*, o primeiro indício disso é que a *álgebra de clifford* que aparece no *Operador de Dirac* é $\mathbb{H} \cong Cl(\mathbb{R}^2)$, porém nossa variedade é \mathbb{R}^3 isso ocorre pois $Cl(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ e com isso a *parte par da álgebra de clifford* (Definição 2.14), denotada por $Cl^+(\mathbb{R}^3)$, é isomorfa a \mathbb{H} , dando assim a estrutura desejada, ao longo da construção esses comentários farão mais sentido, eles são colocados aqui para que o leitor veja a construção sabendo o que esperar. Segue uma breve esquemática da construção do *Spin Dirac*.

Remark 1.10. O *Operador Spin Dirac* será definido no *Fibrado (complexo) Espinorial* $\mathbb{S} = \tilde{P} \times_{Spin} S$ (que generalizará nosso exemplo $\mathbb{S} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2$) e é um *Fibrado Associado* construído na Seção 2. Para isso usaremos os conceitos: *Álgebra de Clifford* (Definição 2.1), *Grupo Spin* (1.4), *Representação Espinorial* (2.17) $\rho : Spin \rightarrow End_{\mathbb{C}}(S)$ (Em que S vide Definição 2.9 é o Espaço Espinorial, espaço vetorial complexo que generaliza no nosso exemplo o espaço de espinores \mathbb{C}^2). Por fim, um resumo esquemático da espinha dorsal da construção será:

- Dado V (que posteriormente será $V = T_p M$) construir *Álgebra de Clifford real* $Cl(V)$, Definição 2.1.
- Definir $Cl^+(V) \subset Cl(V)$ vide Definição 2.14 e dentro da subálgebra entender o *Grupo Spin*.
- Analisar, de acordo com a paridade de $dim_{\mathbb{R}} V$ a quem $Cl^{\mathbb{C}}(V)$, complexificação de $Cl(V)$ Definição 2.6, é isomorfo vide Proposição 2.8 (exemplo, no caso par $Cl^{\mathbb{C}}(V) \cong End_{\mathbb{C}}(S)$).
- Baseado no item anterior (que depende da dimensão) apresentar representação $\rho : Spin \rightarrow SU(S) \subset End_{\mathbb{C}}(S)$, Definição 2.17.

2. ESTRUTURAS PRELIMINARES

Aqui introduziremos algumas das principais estruturas necessárias para fazer sentido dessa teoria. Para fins de brevidade e simplicidade do texto será oferecida uma diagonal sobre a teoria,

¹⁰Aqui é usada a equivalência da definição de uma *Conexão Afim* ∇ como sendo $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ ou $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$.

muito será omitido, incluindo certas demonstrações. Para mais detalhes desta teoria recomenda-se [7, 11, 9] o primeiro contém uma exposição mais amigável e com certa riqueza de detalhes; o segundo contém uma exposição sofisticada e detalhista e o terceiro favorece a brevidade na exposição, por fim a Tabela 1 e alguns comentários também são baseados em [3]. O conceito que amarra todas essas estruturas são álgebras tensoriais específicas as *Álgebras de Clifford* (vide Definição 2.1) que é o nosso primeiro assunto.

2.1. Álgebras de Clifford. Para tratar de *Álgebras de Clifford* nos apoiaremos no exemplo já construído na Seção 1, mas primeiramente veremos uma série de definições abstratas.

Definição 2.1. Seja $m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$, a **Álgebra de Clifford**¹¹ $Cl_m(\mathbb{R})$ é uma associativa sobre \mathbb{R} que é gerada pela unidade 1 e os elementos e_1, \dots, e_m respeitando as seguintes relações:

$$e_i^2 = -1, \quad e_i e_j = -e_j e_i, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq m$$

De modo mais concreto, pode-se enxergar uma *Álgebra de Clifford* como: seja $\mathcal{T}(V)$ *álgebra tensorial de V* , para espaço vetorial de dimensão m com produto interno (V, \langle, \rangle) , então a **Álgebra de Clifford associada a V** , $Cl(V) = Cl_m(\mathbb{R})$, é dada por $\mathcal{T}(V)$ quocientado pelo ideal $v \otimes v - \|v\|^2$ para todo $v \in V$. Então a multiplicação em $Cl(V)$ respeita $vw + wv = \{v, w\} = -2\langle v, w \rangle$.

Com essa definição é possível provar que o conjunto:

$$\{1, e_{i_1} \cdots e_{i_r} \mid i_1 < \cdots < i_r, 1 \leq r \leq m\}$$

é uma base para $Cl_m(\mathbb{R})$, logo $\dim C_m = 2^m$.

Exemplo 2.2. Primeiramente alguns exemplos básicos:

- (1) Temos $Cl_0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$;
- (2) Temos também $Cl_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C}$, tal que $e_1 = i$.
- (3) Por fim, temos também como já citado na Seção 1 temos $Cl_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{H}$, tal que $e_1 = \mathbf{i} = i\sigma_3$; $e_2 = \mathbf{j} = i\sigma_2$; $e_1 e_2 = \mathbf{k} = i\sigma_1$, como visto na Proposição 1.3.

Apesar de o terceiro exemplo anterior já ser interessante o suficiente para ter em mente, para o leitor interessado todas as *Álgebras de Clifford* $Cl_m(\mathbb{R})$ foram explicitamente determinadas (vide Tabela 1 retirada de [3])

Definição 2.3. Uma **Representação da Álgebra de Clifford** $Cl_m(\mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n ou **Representação de $Cl_m(\mathbb{R})$ de grau n** , é um *morfismo de álgebras*:

$$\rho: Cl_m(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \cong End(\mathbb{R}^n), \text{ tal que } \rho(1) = I.$$

Em que $M_n(R)$ é álgebra de matrizes n por n com coeficientes na álgebra R . Naturalmente, temos que duas representações ρ e $\tilde{\rho}$ são equivalentes se existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que:

$$\tilde{\rho}(x) = A\rho(x)A^{-1}$$

Segundo [3] temos que cada representação de $Cl_m(\mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n é *equivalente* a uma que corresponde ao conjunto de matrizes: E_1, \dots, E_m em $O(n)$ e anti-simétricas, tais que:

$$E_i^2 = -I, \quad E_i E_j = -E_j E_i, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq m$$

Segundo [3] segundo a Tabela 1 não só temos todas as *Álgebras de Clifford* como também $Cl_{m-1}(\mathbb{R})$ tem uma *representação irredutível* de grau n se e somente se $n = \delta(m)$ segundo a tabela.

Com esse nosso entendimento superficial de *Álgebras de Clifford* já temos o essencial para definir um *Fibrado de Clifford* vide Definição 2.4 e consequentemente entender a Definição 1.8. Até agora, definimos uma generalização do que as *Matrizes de Pauli multiplicadas por i* fazem no exemplo da Seção 1 para um espaço vetorial sobre \mathbb{R} com produto interno, porém para entender estruturas geométricas queremos relacionar isso com *Variedades Riemannianas*, então

¹¹Otras notações comuns são C_m , $Cl(\mathbb{R}^m)$ ou mais geralmente $Cl(V)$ para V espaço vetorial sobre \mathbb{R} de dimensão m . Essa última será utilizada posteriormente para facilitar a enxergar uma *estrutura de Clifford em um Fibrado*, um *Fibrado de Clifford* vide Definição 2.4.

m	$Cl_{m-1}(\mathbb{R})$	$\delta(m)$
1	\mathbb{R}	1
2	\mathbb{C}	2
3	\mathbb{H}	4
4	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	4
5	$M_2(\mathbb{H})$	8
6	$M_4(\mathbb{C})$	8
7	$M_8(\mathbb{R})$	8
8	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$	8
$k + 8$	$M_{16}(Cl_{k-1}(\mathbb{R}))$	$16\delta(k)$

TABELA 1. Tabela com todas as *Álgebras de Clifford* (Definição 2.1) e o *grau* de suas *Representações Irredutíveis* (veja Definição 2.3).

nosso *produto interno* será trocado pela *Métrica Riemanniana* e nosso *Espaço Vetorial* por um *Fibrado Vetorial*, então em paralelo a Definição 2.1 teremos nossa *Estrutura de Clifford* e nosso primeiro grande exemplo.

2.2. Fibrados de Clifford e Operador de Hodge-deRham.

Definição 2.4. Uma *Estrutura de Clifford* em um *fibrado vetorial* E sobre uma *Variedade Riemanniana* (M, g) é um morfismo suave de fibrados $c : T^*M \otimes E \rightarrow E$, tal que:

$$\{c(\xi), c(\eta)\} = -2g(\xi, \eta)I_E, \quad \forall \xi, \eta \in \Omega^1(M),$$

Em que I_E é uma aplicação que leva $p \in M$ em I_{E_p} que é a função identidade na fibra E_p e para toda 1-forma α denotamos $c(\alpha)$ como o *morfismo de fibrados* $c(\alpha) : E \rightarrow E$ dado por:

$$c(\alpha)u = c(\alpha, u), \quad \forall u \in \Gamma(E).$$

O morfismo c é usualmente chamado de *Multiplicação de Clifford* da *Estrutura (de Clifford)*. O par $(\text{Fibrado Vetorial}, \text{Estrutura de Clifford})$ é chamado **Fibrado de Clifford**.

Para facilitar a notação de relacionar com *Fibrados* costumaremos denotaremos as *álgebras de Clifford* por $Cl(V)$ para algum espaço vetorial V .

Com isso, podemos ver a *multiplicação de Clifford* c como uma extensão da nossa representação para os fibrados. Sabemos que toda *Representação álgebra de Clifford* pode ser encarada como ortogonal, isso será relevante para que ela se comporte bem com a *métrica da variedade*. Construiremos agora alguns exemplos, que serão centrais de *Fibrados de Dirac* e seus operadores como o Exemplo 2.5 que é o operador de Hodge-DeRham e o exemplo da Definição 2.22 que é o operador de Dirac Espinorial ou *Spin Dirac*, para esse segundo algumas estruturas ainda precisam ser apresentadas, mas o primeiro será feito a seguir. Os comentários a seguir são fortemente baseados nas subseções de 11.1.5 até o final da seção 11.1 de [11], para mais detalhes teóricos da construção recomenda-se olhar nesse livro.

De modo geral a construção consistem em escolher um *Grupo de Lie* G cuja representação $\rho : G \rightarrow GL(V)$ induza, de forma que o *produto de Clifford* $c : Cl(V) \rightarrow End(E)$ seja invariante pela ação de G , uma representação ortogonal $\mu : G \rightarrow GL(E)$, usando c da *álgebra de Clifford* $Cl(V)$ (Vale ressaltar que isso significa que nessa construção a representação da álgebra de Clifford já é um dado, naturalmente há uma gama de representações que poderia ter sido escolhidas, um possível lugar para escolhe-las é na Tabela 1), e então queremos um G -fibrado principal P tal que o *Fibrado Associado* $P \times_{\rho} V$ seja isomorfo a T^*M .¹² Então, será possível construir $\mathcal{E} = P \times_{\mu} E$ satisfazendo as condições de um *Fibrado de Dirac* (vide Definição 1.8).

Exemplo 2.5. Para o *Operador de Hodge-DeRham* o grupo a escolher será $SO(V)$. Vale notar que como a ação do grupo preserva o produto interno, então pela Definição 2.1 temos que a ação

¹²Vale o comentário que isso pode não ser possível devido a *obstruções topológicas*.

induz um automorfismo que preserva a inclusão $V \hookrightarrow Cl(V)$. Induzindo assim a *representação ortogonal*:

$$c : Cl(V) \rightarrow \text{End}(\Lambda^\bullet V)$$

tal que c é invariante pela ação do grupo, ou seja:

$$c(g \cdot v)(\omega) = g \cdot (c(v)(g^{-1} \cdot \omega)), \quad \forall g \in SO(V), v \in V, \omega \in \Lambda^\bullet V$$

Desse modo sendo (M, g) *Variedade Riemanniana*, nosso *Fibrado de Clifford* será construído como *Fibrado Associado* ao SO -fibrado principal dos co-referenciais ortogonais orientados, visto que $E = \Lambda^\bullet V$. As *Conexões* são as escolhas usuais, no caso a *Conexão de Levi-Civita* e suas associadas. Com isso teremos o *Operador de Dirac Geométrico* em questão como o *Operador de Hodge-DeRham* $d + d^*$, mais sobre ele e algumas aplicações dele serão dadas na Seção 3.

Agora nosso objetivo é introduzir o *Operador de Spin Dirac* ou *Dirac Espinorial*, porém antes disso teremos de construir um pouco mais de teoria. Vale comentar que muitas das referências irão além de definirão não somente *Spin*, mas o *Spin^c*, porém devida a tentativa de que estas notas sejam uma introdução gentil a estas estruturas, essa última será considerada como fora do escopo do texto, apesar de exigir poucos adicionais teóricos em relação aos apresentados aqui.

Segundo [7, 11] uma estratégia para conseguirmos o desejado é em cima da estrutura já construída, aqui com o fibrado relativo a $\Lambda^\bullet V$, com P um SO -fibrado principal, é usar que segundo Definição 1.4 o *Spin*(n) é recobrimento universal de $SO(n)$ para $n \geq 3$ para gerar um *Spin*(n)-fibrado principal \tilde{P} fazendo o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P} & \longrightarrow & P \\ & \searrow & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

Aliado a isso estabeleceremos algumas condições para essa estrutura existir, visto que existirão *obstruções topológicas* para isso. Consequentemente poderemos construir um *Fibrado de Clifford* $Cl(P)$ com $P = Fr(TM)$ o *fibrado dos referenciais em TM*, que é $SO(n)$ -fibrado principal, como $Cl(P) = P \times_{SO(n)} Cl(\mathbb{R}^n)$ e nosso *fibrado espinorial* \mathcal{E} será dado por, supondo que M admita estrutura espinorial, $\tilde{P} \times_{Spin(n)} S_n$ em que \tilde{P} é um *Spin*(n)-fibrado principal e S_n é um *Espaço Espinorial* vide Definição 2.9.

2.3. Espinores e Estruturas Spin. Por hora a breve discussão sobre *Spin*(n) em torno da Definição 1.4 será suficiente, mas para facilitar a construção do *Espaço Espinorial* S_n é útil olhar para complexificações de Álgebras de Clifford para estudar suas representações complexas, segundo [11] a teoria real é mais elaborada.¹³

Definição 2.6. Dada *álgebra de Clifford* $Cl(V)$ define-se $Cl^{\mathbb{C}}(V) := Cl(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ como a **Álgebra de Clifford Complexa**, que é precisamente a *complexificação da álgebra de Clifford*.

Para favorecer a brevidade destas notas citaremos somente os principais resultados para o melhor entendimento das estruturas e construções, mais detalhes podem ser vistos no capítulo 2 de [7] e no capítulo 11 de [11] que fazem abordagens ligeiramente diferentes. Pensando nos nossos exemplos de *álgebra de Clifford* temos:

Exemplo 2.7. Complexificaremos os exemplos básicos anteriores:

- (1) Temos $Cl_0^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}$.

¹³Essa construção também permite olhar para *Spin^c*(n), porém como nestas notas não abordaremos esta estrutura trabalhar com a complexificação pode ser enxergado pelo leitor como *mero truque de Teoria de Representações*.

(2) Temos também, $Cl_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) = Cl(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

(3) Por fim temos, $Cl_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) = Cl(\mathbb{R}^2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ que pode ser identificada com $M_2(\mathbb{C})$.

Pode-se generalizar esses exemplos com um padrão, a Tabela 1 pode ajudar a visualizar isso, através do seguinte resultado:

Proposição 2.8. • Se $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$, $Cl^{\mathbb{C}}(V) \cong M_{2n}(\mathbb{C})$.

• Se $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n + 1$, $Cl^{\mathbb{C}}(V) \cong M_{2n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2n}(\mathbb{C})$

Com a Proposição 2.8 em mãos, identificaremos a Álgebra de Clifford Complexa para um Espaço Vetorial V de dimensão real n , para n par, com $End_{\mathbb{C}}(S_n)$ e S_n como dito antes será o Espaço de Espinores, construiremos ele em seguida baseado em [7]:

Como dito acima tomaremos $n = \dim_{\mathbb{R}} V$ par, $n = 2m$. Escolhendo uma orientação para V , ou seja, uma base ortonormal positiva e_1, \dots, e_n . Em $V \otimes \mathbb{C}$, consideremos o subespaço W gerado pela base de vetores da forma:

$$\eta_j := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{2j-1} - ie_{2j}), \quad j = 1, \dots, m.$$

Se estendermos o produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para $V \otimes \mathbb{C}$ pela linearidade complexa, teremos

$$\langle \eta_i, \eta_j \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \quad \text{for all } j$$

Logo,

$$(2.1) \quad \langle w, w \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \quad \text{for all } w \in W$$

Pro fim, temos

$$V \otimes \mathbb{C} = W \oplus \bar{W},$$

tal que \bar{W} é gerado pelos vetores $\bar{\eta}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{2j-1} + ie_{2j})$, $j = 1, \dots, m$. Como temos Equação 2.1, então \bar{W} é o espaço dual W^* de W com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$, ou seja, para todo $w \in W \setminus \{0\}$, existe um único $w' \in \bar{W}$ tal que $\|w'\| = 1$ e

$$\langle w, w' \rangle_{\mathbb{C}} = \|w\|.$$

Com isso define-se:

Definição 2.9. O Espaço Espinorial S é definido como a álgebra exterior $\Lambda^{\bullet}W$ de W , construído acima. Para V com dimensão real n pode-se denotar S_n no lugar de S .

Para fazer a identificação de $Cl^{\mathbb{C}}(V)$ com $End_{\mathbb{C}}(S)$ definiremos uma representação específica que fará isso.

Definição 2.10. Vimos que $v \in V \otimes \mathbb{C}$ pode ser escrito como $v = w + w'$ com $w \in W, w' \in \bar{W}$ e para $s \in S = \Lambda W$, definimos:

$$\rho(w)s := \sqrt{2}\epsilon(w)s \quad (= \sqrt{2}w \wedge s, \text{ em que } \epsilon \text{ denota o produto exterior.})$$

$\rho(w')s := -\sqrt{2}\iota(w')s$ (em que $\iota(w')$ denota o produto interior; essa construção faz sentido tendo em vista a identificação \bar{W} com o espaço dual W^* de W).

ρ se estende para todo $Cl^{\mathbb{C}}(V)$ pela regra $\rho(vw) = \rho(v)\rho(w)$, ρ é uma representação de $Cl^{\mathbb{C}}(V)$.

Para os cálculos de que essa representação e sua extensão estão bem definidas referencio Seção 2.4 de [7].

Agora restringiremos a ρ da Definição 2.10 para o Grupo *Spin*, obtendo assim a representação espinorial, que nos permitirá definir a estrutura desejada. Para isso, enxergaremos $Spin(V)$ dentro de $Cl(V)$, segundo [9]. Veremos primeiro duas definições preliminares.

Definição 2.11. Seja $Cl^{\times}(V)$ o grupo multiplicativo de unidades da álgebra $Cl(V)$.

Definimos o grupo $Pin(V)$ como o subgrupo de $Cl^{\times}(V)$ gerado por elementos da forma $v \in V$ com $\|v\|^2 = 1$.

Definição 2.12. Seja o anti-automorfismo $a \mapsto a^t$ de $Cl(V)$, a **Transposta de Clifford** definida na base $e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}\dots e_{\alpha_k}$ como:

$$(e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}\dots e_{\alpha_k})^t = e_{\alpha_k}\dots e_{\alpha_2}e_{\alpha_1} \left(= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}\dots e_{\alpha_k} \right).$$

Em particular

$$e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}\dots e_{\alpha_k}(e_{\alpha_1}\dots e_{\alpha_k})^t = \begin{cases} 1, & \text{se } k \text{ é par} \\ -1, & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Também temos para todo $a, b \in Cl(V)$

$$(ab)^t = b^t a^t$$

Remark 2.13. Com isso pode-se notar que por uma ação por conjugação em V ($\varphi : Pin(V) \rightarrow O(V)$; $\varphi(a)v = ava^t$) o grupo $Pin(V)$ se projeta em $O(V)$, o grupo $Spin(V)$ terá características semelhantes com $SO(V)$, como esperado da Definição 1.4. No caso, essa φ restrita a $Spin(n)$, para $n \geq 3$ será um *recobrimento duplo* de $SO(n)$, o *recobrimento universal*.

Note que toda *Álgebra de Clifford* admite uma graduação com $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$, isso se dá pois a álgebra tensorial $\mathcal{T}(V)$ admite e ela passa para o quociente que define a álgebra de Clifford. Com isso, temos a decomposição:

Definição 2.14. Com o comentário anterior temos que para qualquer álgebra de Clifford $Cl(V)$, existe a seguinte decomposição feita pela \mathbb{Z}_2 -graduação $Cl(V) = Cl^+ \oplus Cl^-(V)$.

Vale notar que $Cl^+(V)$ é subálgebra de $Cl(V)$ enquanto $Cl^-(V)$ é um módulo sobre essa subálgebra. Além disso, por definição, $Cl^+(V)$ corresponderá ao subálgebra gerada por elementos de $Cl(V)$ de ordem par, ou seja, seja α um multi-índice, então a base é da forma e_α para $|\alpha|$ par.

Proposição 2.15. *Podemos definir de modo equivalente a 1.4 o Grupo Spin, porém agora para todo $n \in \mathbb{N}$, $Spin(V)$ como a intersecção $Pin(V) \cap Cl^+(V)$, em outras palavras, como o Kernel do morfismo de grupos $Pin(V) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ induzido pela decomposição $Cl(V) = Cl^+(V) \oplus Cl^-(V)$ vide Definição 2.14.*

Agora veremos com isso alguns exemplos básicos, primeiramente quem são $Spin(1)$ e $Spin(2)$ que não haviam sido definidos na Definição 1.4 e por fim nosso exemplo de $Spin(3)$ que foi visto como relativo a \mathbb{H} , justamente pois estávamos em \mathbb{R}^3 e $\mathbb{C}l(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ e $Cl^+(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{H}$.

Exemplo 2.16. (1) O grupo $Pin(1)$ é o subgrupo de \mathbb{C} gerado por $\pm i$. Então, é o grupo cíclico de ordem 4. O subgrupo $Spin(1)$ é o \mathbb{Z}_2 multiplicativo dentro de \mathbb{R} .
 (2) O grupo $Pin(2)$ é o subgrupo de \mathbb{H} gerado pelos círculos passando por \mathbf{j} e \mathbf{k} , ou seja, por todos os elementos da forma $\cos(\theta)\mathbf{j} + \sin(\theta)\mathbf{k}$ para $\theta \in S^1$. Já o subgrupo $Spin(2)$ é a união de dois círculos, o círculo unitário do plano complexo e \mathbf{j} vezes ele. Então, $Spin(2) \cong S^1$.
 (3) O grupo $Spin(3) \cong SU(2) \cong S^3$ que é isomorfo aos quatérnios unitários, como esperávamos da Definição 1.4, visto $Cl^+(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{H}$.

Então nota-se que $Spin(n)$ pode ser visto como grupo gerado pelo produto de uma quantidade par de geradores de $Pin(n)$, logo, é o grupo de todos os elementos $a \in Pin(n)$ tais que $aa^t = 1$.

Desse modo temos que $Spin(V) \subset Cl^+(V) \subset Cl(V) \subset Cl^{\mathbb{C}}(V)$, então retornamos a representação ρ da Definição 2.10 e agora restringiremos ela para $Spin(n)$ como já era nosso objetivo. É possível decompor essa ρ em seus auto-espacos relativos aos auto-valores ± 1 , tendo assim:

$$S^\pm := \Lambda^{\bullet \pm} W$$

Definição 2.17. Define-se a **Representação Espinorial** como a restrição de ρ na Definição 2.10 para $Spin(V)$.

Além disso, como $Spin(V)$ deixa S^+ e S^- invariantes a representação em questão não é irredutível mas se decompõe nesses subespaços, de forma irredutível.¹⁴ Então, as representações

¹⁴Vale o comentário que o produto por um elemento de $Cl^-(V)$ troca entre S^+ e S^- .

restritas a S^+ e S^- são chamadas de **Representações Metade Espinoriais** ou em inglês **Half Spinor Representation**.¹⁵

Com isso agora, definiremos *estruturas espinoriais* em variedades vide a Definição 2.18 que então usaremos para entender o *Fibrado Espinorial* vide Definição 2.21 e então por fim definir um caso central de *Operador de Dirac Geométrico* o *Operador de Dirac Espinorial* ou *Spin Dirac*, vide Definição 2.22.

2.4. Fibrados Espinoriais e Operador de Dirac Espinorial.

Definição 2.18. Uma **Estrutura Spin** em M é um fibrado principal \tilde{P} sobre M com fibras $\text{Spin}(n)$ cujo quociente em cada fibra pelo centro ± 1 é isomorfo ao *Fibrado de Referenciais* $\text{Fr}(TM) = P$ sobre M . Uma *variedade Riemanniana* com uma *estrutura Spin* fixa é dita **Variedade Spin**. Em outras palavras, o diagrama abaixo comuta, como citado anteriormente:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P} & \xrightarrow{\varphi} & P \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

em que π é a projeção dos respectivos fibrados e φ é o recobrimento duplo não trivial $\varphi : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ em cada fibra como descrito na Observação 2.13. Pode-se dizer também que o *Fibrado de Referenciais* é levantado para um $\text{Spin}(n)$ fibrado.

Remark 2.19. É importante ressaltar que existem *Obstruções Topológicas* para a existência dessa estrutura dessa. Um modo clássico, pois maior parte das referências faz este comentário através desse método, de enxergar isso é pelas funções de transição. Ou seja, dada (M^n, g) *variedade Riemanniana orientada* temos $P = \text{Fr}(TM)$ que é um $\text{SO}(n)$ -fibrado principal cuja estrutura pode ser dada por uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ e funções de transição

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{SO}(n)$$

satisfazendo condições de co-ciclo.

Para uma variedade admitir estrutura de Spin precisamos conseguir levantar P para \tilde{P} , o que implica na existência de funções de transição

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{Spin}(n)$$

satisfazendo condições de co-ciclo e também:

$$\varphi(\tilde{g}_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}, \forall \alpha, \beta.$$

Para $\varphi : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ o recobrimento duplo da Observação 2.13. Agora para analisarmos a existência desse levantamento tomaremos uma cobertura trivializante $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ para P que seja uma *Boa Cobertura*, ou seja todas as múltiplas interseções são contráteis. Como as interseções $U_{\alpha\beta}$ são contráteis, então para todo $g_{\alpha\beta}$ existe ao menos uma extensão para $\tilde{g}_{\alpha\beta}$, com isso temos a igualdade $\varphi(\tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\gamma}\tilde{g}_{\gamma\alpha}) = g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = I$ e assim deduzimos

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\gamma}\tilde{g}_{\gamma\alpha} \in \text{Ker } \varphi = \mathbb{Z}_2.$$

Assim, levantar a informação de colagem $g_{\alpha\beta}$ para $\text{Spin}(n)$ produz uma co-cadeia de Čech de grau 2 do feixe trivial de \mathbb{Z}_2 . Ou seja, a 2 co-cadeia:

$$(\epsilon_\bullet) : U_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow \epsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

Vale notar também que para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tais que $U_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq \emptyset$.

¹⁵Lembrando que *half spin* ocorre para dimensão par.

$$\epsilon_{\beta\gamma\delta} - \epsilon_{\alpha\gamma\delta} + \epsilon_{\alpha\beta\delta} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0 \in \mathbb{Z}_2.$$

Em outras palavras, ϵ_\bullet define um 2-cociclo de Čech, e então define um elemento no *Grupo de Cohomologia de Čech* $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$.¹⁶

É possível ver que esse elemento é independente das várias escolhas que feitas no processo (a cobertura \mathfrak{U} , os dados de colagem $g_{\alpha\beta}$ e os seus respectivos levantamentos $\tilde{g}_{\alpha\beta}$), esse elemento é intrínseco de P e é chamado de *Segunda Classe de Stiefel-Whitney de M* e denotada por $w_2(M)$. Nota-se, então que se $w_2(M) \neq 0$ então M não pode admitir *estrutura Spin*. Em adição é possível provar que **a recíproca também é verdadeira**.

Vale também o breve comentário de que mesmo que a *estrutura Spin* exista ela pode não ser única, equivalência dessas estruturas é um tanto sutil e foge do escopo destas notas, para referência olhar página 548 de [11]. Listarei agora brevemente exemplos tirados de [11] e [7].

Exemplo 2.20. • Um *variedade Riemanniana simplesmente conexa* M de dimensão ≥ 5 admite *estrutura Spin* se e somente se toda *superfície compacta orientável mergulhada* em M possui *fibrado normal trivial*.

- Uma *4-variedade simplesmente conexa* M admite *estrutura Spin* se e somente se o *fibrado normal* N_Σ de qualquer *superfície compacta orientável mergulhada* Σ tem classe de Euler par, ou seja

$$\int_{\Sigma} e(N_\Sigma)$$

é um inteiro par.

- Toda *superfície compacta orientável* admite *estrutura Spin*, em particular se tem *genus* g , então admite 2^{2g} estruturas.
- Pelo exemplo anterior S^2 admite somente uma única *estrutura Spin*, mais geralmente, qualquer esfera S^n admite uma única *estrutura Spin*. (A existência é imediata do cálculo da *Cohomologia de DeRham* das esferas.)
- O produto de duas variedades que admitem *estrutura Spin* tem uma *estrutura Spin* canônica. (Para a existência da *estrutura Spin* no produto pode-se usar a *Fórmula de Künneth*, que funciona igual para DeRham desde que os coeficientes estejam em um *corpo*, no caso estão em \mathbb{Z}_2 .)
- $w_2(\mathbb{R}P^n) = 0$ se e somente se $n \equiv 3 \pmod{4}$, enquanto $\mathbb{C}P^n$ admite *estrutura Spin* se e somente se n é ímpar.

Finalmente, agora construiremos o tão esperado *Fibrado Espinorial*.

Definição 2.21. Assumindo que M possui uma *estrutura Spin* $\tilde{P} \rightarrow M$. Como a fibra $\text{Spin}(n)$ de \tilde{P} age no *Espaço de Espinores* (vide Definição 2.9) S_n e para n par também no *Espaço de Half Spinors* (vide Definição 2.17) S_n^\pm através das *representações espinorial e half spinor* (vide Definição 2.17), podemos obter os *Fibrados Associados* $\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_n^\pm$ sobre M com grupo de estrutura $\text{Spin}(n)$,

$$\mathbb{S}_n := \tilde{P} \times_{\text{Spin}(n)} S_n, \quad \mathbb{S}_n^\pm := \tilde{P} \times_{\text{Spin}(n)} S_n^\pm,$$

com

$$\mathbb{S}_n = \mathbb{S}_n^+ \oplus \mathbb{S}_n^- \quad \text{para valores pares de } n$$

Com isso, $\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_n^\pm$ são respectivamente **Fibrado Espinorial (Complexo)** e **Fibrado Metade Espinorial (Complexo)** [ou em inglês **(Complex) Half Spinor Bundle**].

¹⁶Para o leitor não acostumado com essas ferramentas, recomendo as respostas, em especial a primeira, desta pergunta do MathOverflow <https://mathoverflow.net/questions/63519/coefficients-in-cohomology>, lá há exemplos concretos e simples sobre relacionar *Cohomologia de Čech* com existência de fibrados principais pelas condições de co-ciclo.

Agora, definiremos uma *Conexão* natural em $\mathbb{S}(M)$ que torna o *Produto de Clifford covariantemente constante* como desejado para que o fibrado seja um *Fibrado de Dirac* e então teremos nosso *Operador de Dirac Geométrico* conhecido como *Spin Dirac*.

Tome a *Conexão de Levi-Civita* ∇^g que pode ser vista como uma conexão para o $SO(n)$ -fibrado principal P . Além disso, podemos definir ∇^g como a coleção de 1-formas a valores em $\mathfrak{so}(n)$ $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha) \otimes \mathfrak{so}(n)$ tal que

$$\omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta} \quad \text{em } U_{\alpha\beta}.$$

Considere o isomorfismo canônico de *Álgebras de Lie*

$$\varphi_* : \mathfrak{spin}(n) \rightarrow \mathfrak{so}(n)$$

Então a coleção $\tilde{\omega}_\alpha = \varphi_*^{-1}(\omega_\alpha)$ define a conexão $\hat{\nabla}$ no fibrado principal \tilde{P} , e então via a *Representação Espinorial* ρ define-se a *Conexão* $\nabla = \nabla^{\mathbb{S}}$ no *Fibrado Espinorial* $\mathbb{S}(M)$.

Então, $(\mathbb{S}(M), \hat{\nabla})$ é um *Fibrado de Dirac* e cujo operador de Dirac é o *Spin Dirac* \mathfrak{D} .

Definição 2.22. O *Operador de Dirac Geométrico* associado ao *Fibrado Espinorial Complexo* é \mathfrak{D} chamado de **Spin Dirac** ou **Dirac Espinorial**.

Quando a variedade M tem dimensão par, o operador é graduado. Logo, temos que, relativa a decomposição $\mathbb{S} = \mathbb{S}^+ \oplus \mathbb{S}^-$, o *Spin Dirac* \mathfrak{D} tem a forma de blocos

$$\mathfrak{D} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\delta}^* \\ \tilde{\delta} & 0 \end{bmatrix}$$

em que $\tilde{\delta} : C^\infty(\mathbb{S}^+) \rightarrow C^\infty(\mathbb{S}^-)$ é um operador de primeira.¹⁷

Veremos mais detalhes e algumas aplicações sobre ele e sobre o *Operador de Hodge-DeRham* na Seção 3.

3. OPERADOR DE DIRAC GEOMÉTRICO E APLICAÇÕES

Agora nesta última seção veremos uma coleção de fatos e aplicações sobre *Operador de Dirac Geométricos*, focados nos dois exemplos que construímos os operadores *Hodge-DeRham* e *Spin Dirac*. Elas são fortemente baseadas em [11, 7] e também na apresentação de slides de junho de 2007 do pesquisador Sebastian Montiel da Universidade de Granada [8].

3.1. Preliminares.

Definição 3.1. Seja E um *fibrado vetorial complexo de posto* N sobre M , seja também $\langle \cdot, \cdot \rangle$, uma *métrica Hermitiana* e ∇ uma *Conexão Unitária* com $X\langle\psi, \phi\rangle = \langle\nabla_X\psi, \phi\rangle + \langle\psi, \nabla_X\phi\rangle$ $\psi, \phi \in \Gamma(E)$, $X \in \Gamma(TM)$, a *conexão de Levi-Civita* e com isso podemos calcular um **Hessiano Generalizado**:

$$(\nabla^2\psi)(X, Y) = \nabla_X\nabla_Y\psi - \nabla_{(\nabla_X Y)}\psi$$

Cuja parte anti-simétrica:

$$R^E(X, Y)\psi = (\nabla^2\psi)(X, Y) - (\nabla^2\psi)(Y, X)$$

é tensorial em ψ . Note que R^E é o **tensor de curvatura** de (E, ∇) .

Definição 3.2. Define-se o **Rough Laplacian** como:¹⁸

$$\Delta : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \quad \Delta\psi = -\text{tr} \nabla^2\psi = -\sum_{i=1}^n (\nabla^2\psi)(e_i, e_i)$$

Para $E = M \times \mathbb{C}$, Δ é o *Laplaciano usual*.

¹⁷ordem cujo símbolo é dado pelo *Produto de Clifford*.

¹⁸Vale notar que a partir daqui o símbolo Δ indicará o Laplaciano Geométrico, ou seja, o sinal "-" estará dentro da fórmula, diferente do escrito na Seção 1.

Remark 3.3. É possível provar que os *Operadores de Dirac Geométricos* são elípticos, com isso, listaremos algumas propriedades úteis de *Operadores Diferenciais Elípticos*, para mais detalhes sobre teoria de Operadores no contexto deste trabalho recomendo [2]. Seja $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ um *Operador Diferencial Elíptico* tomando valores em seções de dois fibrados vetoriais sobre uma *Variedade Riemanniana Compacta M*:

- Sabe-se que $\ker L$ e $\text{coker } L$ tem dimensão finita e o índice de L é definido por: $\text{ind } L = \dim \ker L - \dim \text{coker } L = \dim \ker L - \dim \ker L^*$, tal que $L^* : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(E)$ é o adjunto formal de L com respeito ao produto L^2 . Sabe-se que o índice depende só da classe de homotopia de L . (Esses fatos são obtidos a partir de que operadores elípticos são *Operadores de Fredholm* ou podem ser estendidos para tal classe.)
- Se $E = F$ e o operador L é L^2 -simétrico, então seu *espectro* é uma sequência de números reais com *auto-espacos* de dimensão finita e consiste de seções suaves.
- Note que Δ é L^2 -simétrico não negativo, pois

$$\int_M \langle \Delta \psi, \phi \rangle = \int_M \langle \nabla \psi, \nabla \phi \rangle$$

para seções de suporte compacto.

Agora voltando para os *Fibrados de Dirac*, prova-se com extensivos cálculos (em [11, 7]) que a relação entre um *Operador de Dirac Geométrico D* e o *Rough Laplacian Δ* vem do produto de Clifford:

$$\{c(X), c(Y)\} = c(X)c(Y) + c(Y)c(X) = -2\langle X, Y \rangle \quad X, Y \in \Gamma(TM)$$

que implica

Teorema 3.4. *Seja D um Operador de Dirac Geométrico definido em um Fibrado de Dirac E, cujo Produto de Clifford é c. Então vale a seguinte relação:*

$$D^2 = \Delta + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c(e_i)c(e_j) R^E(e_i, e_j)$$

Vale notar que isso é diretamente análogo ao exemplo protótipo inicial, vide proposição 1.6, em que nesse exemplo a variedade em questão tem curvatura constante 0.

Corolário 3.5. *Consequências diretas do Teorema 3.4 são:*

- Tanto D^2 quanto D são elípticos. (Como comentado anteriormente.)
- Se a variedade M é compacta, então D tem espectro real e discreto tendendo a $+\infty$ e $-\infty$.

3.2. Operador de Hodge-de Rham. Agora retornaremos a nosso primeiro exemplo da Seção 2 o *Operador de Hodge-de Rham* no Exemplo 2.5. Tome:

$$E = \wedge_{\mathbb{C}}^{\bullet}(M) = \bigoplus_{k=0}^n \left(\wedge^k(M) \otimes \mathbb{C} \right)$$

munido da *métrica Hermitiana* e *Conexão de Levi-Civita* vindas de (M, g)

A *Produto de Clifford* de forma explícita é:

$$c(X)\omega = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\tilde{\rho}(X)\omega = \epsilon(X)\omega + \iota(X)\omega \quad X \in \Gamma(TM), \omega \in \Gamma(\wedge_{\mathbb{C}}^*(M))$$

Tal que $\tilde{\rho}$ é a extensão da representação da Definição 2.10 para o fibrado de Clifford fibra a fibra. Consequentemente, usamos a métrica Riemanniana de (M, g) para identificar seções de T^*M e TM e assim podemos enxergar ϵ como produto exterior e ι como produto interior, como na Definição 2.10.

Então $(\wedge_{\mathbb{C}}^*(M), \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla, c)$, é *Fibrado de Dirac de posto* $N = 2^n$ e o *Operador de Dirac D*, que será *Hodge-de Rham*, satisfaz:

$$D = \sum_{i=1}^n \epsilon(e_i) \wedge \nabla_{e_i} - \sum_{i=1}^n \iota(e_i) \nabla_{e_i} = d + d^* \quad D^2 = \Delta.$$

Com isso enunciaremos alguns resultados:

Teorema 3.6. (Teorema de Hodge-de Rham) *Se M é compacta,*

$$\ker D = \ker \Delta \cong H^*(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{k=1}^n H^k(M, \mathbb{R})$$

Como neste caso o cálculo do tensor de curvatura R^E é simples para 1-formas temos o seguinte proposição:

Proposição 3.7.

$$\int_M |(d + \delta)\omega|^2 = \int_M |\nabla\omega|^2 + \int_M \text{Ric}(\omega, \omega) \quad \omega \in \Gamma_0(\wedge^1_{\mathbb{C}}(M))$$

que nos permite concluir o seguinte teorema clássico:

Teorema 3.8. (Teorema de Bochner) *Se M é Variedade Riemanniana Compacta com curvatura de Ricci positiva, então não existem 1-formas harmônicas não triviais¹⁹ em M . Consequentemente, o primeiro número de Betti de M é nulo.*

Para mais detalhes sobre formas harmônicas recomendo capítulo 3 de [7], em especial a seção 3.4 em que ele relaciona formas hamônicas com Classes de Cohomologia, dando significado a última afirmação do Teorema de Bochner, pois lá é provado que cada Classe de Cohomologia de uma variedade compacta admite somente uma forma harmônica.

Seguindo nessa mesma linha temos outro resultado interessante que usa informações geométricas. Considere no caso acima $\omega = df$ para um função suave f , então

$$\int_M |\Delta f|^2 = \int_M |\nabla^2 f|^2 + \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f)$$

e assim temos:

Teorema 3.9. (Teorema de Lichnerowicz-Obata) *Seja M uma Variedade Riemanniana Compacta de dimensão n cuja curvatura de Ricci satisfaz $\text{Ric} \geq \text{Ric}_{\mathbb{S}^n(1)} = n-1$ Então, os auto-valores não nulos λ do Laplaciano de M agindo em funcionais satisfaz $\lambda \geq n$ A igualdade é obtida se e somente se M é isométrica a esfera unitária n dimensional. Para obter a igualdade resolve-se a Equação de Obata:*

$$\nabla^2 f = -f \langle, \rangle$$

O operador de *Hodge-de Rham* não preserva o grau das formas, mas preserva a sua paridade, naturalmente um *Fibrado de Dirac* e o seu *Operador de Dirac* herdam a \mathbb{Z}_2 graduação da *Estrutura de Clifford*. Então:

$$d = D^+ = D|_{\Gamma(\wedge^+(M))} \quad d^* = D^- = D|_{\Gamma(\wedge^-(M))}$$

Ambos são operadores elípticos e um é adjunto do outro.

Com isso temos um primeiro resultado de índice:

Teorema 3.10. $\text{ind } D^+ = \dim \ker D^+ - \dim \ker D^- = \sum_k^+ b_k(M) - \sum_k^- b_k(M) = \chi(M)$

$$\text{ind } D^+ = \int_M e(M)$$

Por fim, é válido comentar que a partir desse teorema anterior tem-se o início do caminho para provar o *Teorema de Chern-Gauss-Bonnet* usando o *Teorema do Índice de Atiyah-Singer*, demonstração essa que foge do escopo destas notas, mas pode ser encontrada na seção 3.2 de [12].

¹⁹Formas Harmônicas são formas ω tais que $\Delta\omega = 0$.

3.3. Operador de Spin Dirac. Agora estudaremos um pouco mais o nosso operador Spin Dirac \mathfrak{D} construído no fibrado espinorial \mathbb{S} na Definição 2.22. Usando o Teorema 3.4 para o *Spin Dirac*, segundo contas da página 551 de [11] que usam o fórmula de \mathfrak{D} explícita e a *Identidade de Bianchi*, conclui-se o resultado:

Teorema 3.11. (*Fórmula de Lichnerowicz*) *Se \mathfrak{D} é o Operador de Dirac em um Fibrado Espinorial então,*

$$\mathfrak{D}^2 = \Delta + \frac{1}{4}S$$

Em que S é a Curvatura Escalar de M .

A definição de *Espinor Harmônico* é análogo a de *Formas Harmônicas*, são seções $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ tais que $\mathfrak{D}^2\psi = 0$.

Seguindo com o paralelo com os resultados apresentados na Subseção 3.2 temos a seguinte conta. Dado $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$, para M variedade *Spin Compacta*, temos:

$$\int_M |D\psi|^2 = \int_M |\nabla\psi|^2 + \frac{1}{4} \int_M S|\psi|^2$$

E então temos o Corolário da Fórmula de Lichnerowicz 3.11:

Corolário 3.12. (*Teorema de Lichnerowicz*) *Se M é uma variedade Spin Compacta com curvatura escalar positiva, então não existem espinores harmônicos não triviais em qualquer estrutura Spin em M . Se a condição de curvatura for enfraquecida para Curvatura Escalar não negativa, tem-se que todos os Espinores Harmônicos devem ser Paralelos, ou seja $\nabla\psi = 0$.*

Esse último corolário é um análogo do Teorema de Bochner 3.8 para o *Spin Dirac*,

Na Definição 2.22 define-se a decomposição do *Spin Dirac* em blocos usando a decomposição da *Estrutura de Clifford*, com isso temos semelhantemente ao caso do *Operador de Hodge-de Rham* decomposto em "+" e "-", a decomposição do Spin Dirac pode ser vista como $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^+$ e $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}^-$ e ambos também são elípticos e podem se estender para serem de Fredholm, além disso também são um o adjunto do outro.

Com isso, pode-se notar que assim o índice de \mathfrak{D} não possui informação Topológica e $\text{ind } \mathfrak{D} = 0$, porém como no caso de *Hodge-de Rham* o índice de \mathfrak{D}^+ possuirá informações interessantes, por vezes na literatura \mathfrak{D}^+ é chamado de *Spin Dirac* ao invés de \mathfrak{D} como feito nestas notas.

Enunciaremos agora o *Teorema do Índice de Atiyah-Singer* e tentaremos analisar consequências simples dele para *Spin Dirac*.

Teorema 3.13. (*Teorema do Índice de Atiyah-Singer para Spin Dirac*) *Seja $\mathbb{S} = E$ o Fibrado Espinorial sobre uma variedade M e \mathfrak{D} o Spin Dirac, então temos que:*

$$\text{ind } \mathfrak{D}^+ = \int_M \widehat{\mathbb{A}}(M)$$

tal que $\widehat{\mathbb{A}}(M) = \widehat{\mathbb{A}}(p_1(M), \dots, p_k(M))$, satisfazendo a seguinte equação

$$\widehat{\mathbb{A}}(p_1, \dots, p_k) = \prod_{j=1}^k \frac{y_j}{2 \sinh \frac{y_j}{2}}$$

os y_i são 2-formas que aparecem nas diagonais secundárias da Forma Canônica de Jordan da Curvatura, tem-se que se σ_k for o k -ésimo polinômio simétrico elementar temos,

$$\sigma_j(y_1^2, \dots, y_k^2) = p_j$$

em que $p_j(M) \in H^{4j}(M, \mathbb{Z})$ são as Classes de Pontrjagin de M .

Corolário 3.14. *Suponha M 4-Variedade Spin, então para toda estrutura Spin, temos que o operador Spin Dirac respectivo \mathfrak{D} satisfaz:*

$$\text{ind } \mathfrak{D}^+ = -\frac{1}{24} \int_M p_1(M)$$

Proposição 3.15. *Se M variedade Spin Compacta de dimensão par, temos que o \hat{A} -genus definido por:*

$$\hat{A}(M) = \int_M \hat{A}(M)$$

é um inteiro.

Com isso, pode-se usar o Corolário 3.12 para provar que mais uma consequência pode ser incluída no enunciado do corolário, o fato de que se $\dim M = 4k$, então $\hat{A}(M) = 0$.

Por fim, citaremos resultados que nos dão informações sobre o *Espectro do Spin Dirac*, um deles análogo ao Teorema de Lichnerowicz-Obata 3.9 que falava sobre *Espectro do Laplaciano*

Teorema 3.16. *(Teorema de Friedrich) Seja M uma variedade Spin compacta de dimensão n cuja curvatura escalar satisfaz $S \geq S_{\mathbb{S}^n(1)} = n(n-1)$. Então, os auto-valores λ do Operador de Spin Dirac para qualquer estrutura Spin de M satisfaz $|\lambda| \geq \frac{n}{2}$*

Teorema 3.17. *(Teorema de Bär) Se M é uma Superfície Spin compacta de genus zero e λ é o um auto-valor do respectivo Operador de Spin Dirac, então*

$$\lambda^2 \geq \frac{4\pi}{A(M)}$$

tal que $A(M)$ é a área da superfície M

4. AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente aos professores Carlos Grossi, David Martínez, João Nuno Mestre e Ivan Struchiner pelas aulas e discussões do curso de Topologias das Variedades que foram muito enriquecedoras. Agradecer também a José Neto, Leonardo Cavenaghi e Marcos Alexandrino pelas discussões sobre Dirac online, tanto sobre a parte matemática como a física. Durante o desenvolvimento destas notas o autor possuía auxílio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) processo 2021/00551-3.

REFERÊNCIAS

- [1] M. M. Alexandrino, R. G. Bettiol, *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions*. Springer Verlag (2015)
- [2] Bleecker, D. ; Booß-Bavnbek, B. *Index Theory with Applications to Mathematics and Physics*, International Press of Boston Inc (2013)
- [3] Cecil, Thomas; *Lie Sphere Geometry: With Applications to Submanifolds*; Springer; 2ª edição (2007)
- [4] Gonçalves, Guilherme Casas; *Rudimento de Mecânica, Ações Hamiltonianas e Aplicação Momento* Dissertação de Mestrado IME-USP 2015 (orientador Prof. M. Alexandrino)
- [5] Hall, Brian C.; *Quantum Theory for Mathematicians*, GTM, Springer; (2013)
- [6] Holm, D.D.; Schmah, T.; Stoica, C.; *Geometric Mechanics and Symmetry: From Finite to Infinite Dimensions* Oxford University Press; 1 edition (October 11, 2009)
- [7] Jost, Jürgen; *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer; ed. 6 (2011)
- [8] Montiel; Sebastian, (Universidad de Granada) *An Introduction to the Dirac Operator in Riemannian Geometry*, Seminário, junho de 2007
- [9] Morgan, John W; *The Seiberg-Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds*, Princeton University Press (1995)
- [10] Morita , Shigeyuki *Geometry of Differential Forms*, American Mathematical Society; Translations of mathematical monographs, Iwanami series in modern mathematics; Vol. 201 (2001)
- [11] Nicolaescu, Liviu I.; *Lectures on the Geometry of Manifolds*; World Scientific, Ed. 2 (September 2007)
- [12] Nicolaescu, Liviu I.; *Notes on the Atiyah-Singer Index Theorem*, (versão 15 de Novembro 2013)
- [13] Thaller, B. *Advanced Visual Quantum Mechanics*, Springer; (2005)